ISAACI NEWTONI,

EQUITIS AURATI,

OPUSCULA

MATHEMATICA, PHILOSOPHICA

ET

PHILOLOGICA.

Collegit partímque Latinè vertit ac recensuit

JOH. CASTILLIONEUS

JURISCONSULTUS.

TOMUS PRIMUS

Continens

MATHEMATICA.

Accessit Commentariolus de VITA AUCTORIS.



LAUSANNÆ & GENEVÆ,

Apud MARCUM-MICHAELEM BOUSQUET & Socios.

MDCCXLIV.

ILLUSTRISSIMÆ

SOCIETATI REGIÆ

A

SERENISSIMO REGE

CAROLO II.

AD PHILOSOPHIAM PROMOVENDAM

FUNDATÆ,

ET

AUSPICIIS

AUGUSTISSIMI REGIS

GEORGII

FLORENTI,

OPUSCULA HÆC

A

VIRO IMMORTALI

ejusdem

SOCIO CLARISSIMO, PRÆSIDE DIGNISSIMO,

ISAACO NEWTONO

CONSCRIPTA

DAT, DICAT, DEDICAT,

SEU POTIUS

REDDIT, RETRIBUIT, RESTITUIT

J. CASTILLIONEUS
Collector & Editor.

Tu

TU Pater & rerum Inventor; Tu patria nobis
Suppeditas præcepta, tuíſque ex, Inclute, chartis
Floriferis ut Apes in ſaltibus omnia limant,
Omnia nos itidem depaſcimur aurea dicta,
Aurea, perpetuâ ſemper digniſſima vitâ.

LUCRET. De Rer. Naturâ
Lib. III. verſ. 9. & ſeq.

PRÆFATIO

Tom. secund. initio & gallicè litteræ LEIBNITII, anglicè NEWTONI in libro inscripto Historia Fluxionum sive Tractatus originem & progressum peregregiæ istius Methodi brevissimo compendio, (& quasi synopticè) exhibens. Per Josephum Raphsonum A. M. & R. S. S. *Londini, typis Pearsonianis* an. 1715. à pag. 97. ad finem, unde versas eas hìc exhibui. Et hæc quidem de Tomo Primo.

De Opusculis TOMUM SECUNDUM *componentibus.*

Secundus initium ducit à Mundi systemate, quod Angli omnes NEWTONO tribuunt. Priùs editum fuit versum in Anglum sermonem, deinde verò latinè, ut ab Auctore conscriptum fuerat, & nos eum sistimus fideliter à latinâ editione transcriptum.

De Lectionibus Opticis quæ sequuntur, optimè, censeo referam partem præfationis editioni Londinensi præfixæ. Ibi discimus esse has Prælectiones publicas primas, quas NEWTONUS Cantabrigiæ habuit, quando BARROVIUS anno *1669* ei concessit munus professorium in Cathedrâ Lucasianâ. Hunc librum edidisset ipse Auctor, nisi ineptæ quorumdam imperitorum cavillationes eum deterruissent. (Hic forte est Tractatus ille de Refractione Lucis & Coloribus, quem, edendi cum Serierum infinitarum & Fluxionum Methodo consilium cœperat NEWTONUS.)

Liber de Opticis anno 1704 editus ab hoc tractatu haud parum differt. Multa quidem in utroque inveniuntur eodem sensu, sed ratione diversâ tradita ;multa tamen præclara hìc occurrunt, quæ in altero non habentur. Ibi enim Auctor cavisse, quantùm potuit, videtur, ne demonstrationes geometricas cum argumentis philosophicis immisceret; & ubi necesse fuit Propositionem mathematicam proponere, ejus demonstratio vix unquam occurrit. Contrà autem, hìc omnia geometrica in hoc argumento necessaria fusè demonstrat ; quæ forsitan in altero libro ideo omiserit, quoniam haud dubitavit, quin hæ prælectiones aliquando lucem essent

visuræ; cùm non modò publicè Cantabrigiæ lectæ in Archivis fuerant repositæ, sed etiam alia exemplaria in amicorum manibus adservabantur. Quod spectat ad prima optices elementa, auctor noster hìc ubique BARROVII prælectiones opticas sequitur; & quæ, ille de omni luce scripserat, NEWTONUS persequitur ulteriùs, & applicat ad diversam Radiorum Refrangibilitatem; rem BARROVIO ignotam, sed ab eo omnino probatam quando ei ab auctore nostro explicata fuit; quod una ex epistolis D. COLLINSII in Commercio epistolico edita testatur, ubi BARROVIUS de his prælectionibus loquens, opus vocat, quo majus præsens ætas vix protulit. Hic etiam multæ propositiones demonstrantur, quas auctor cum BARROVIO communicavit, & in prælectionibus ejus, demonstrationibus prætermissis, editæ fuêre. Hìc nimirum demonstratur modus illius focum superficierum sphæricarum inveniendi, & in omnibus aliis curvis locum habere ostenditur ope Radii, qui dicitur, curvaturæ; item causticæ; (quas vocant) à refractione ortæ hìc determinantur. Has utique causticas in superficiebus sphæricis, & ipse BARROVIUS determinavit. Hisce verò prælectionibus NEWTONUS in curvis omnibus Radii curvaturæ earum ope has causticas exhibet.

Harum prælectionum exemplum NEWTONUS olim GREGORIO astronomiæ Professori Saviliano dedit, à quo desumtum est illud unde hæc editio descripta est, quod summâ fide & curâ descriptum fuisse cum eo GREGORII conferentes invenimus. Exemplum autem Gregorii, cùm ab ipso NEWTONO fuisset acceptum, non dubitavimus, quin perfectum esset; sed postquam editio nostra typis fuerat impressa, audivimus exemplum illud Cantabrigiæ, in Academiæ archivis asservatum, magis esse absolutum; cujus exemplum nacti, ex collatione rem ita esse invenimus. Differentias igitur unà cum erratis typographicis ad libri calcem adnotavimus. (Nos autem eas locis suis opposuimus.) Notularum, quas Editor addiderat, eas reliquimus, quibus loca indicantur ad quæ Newtonus respicit,

vel

vel idem corrigitur. Unam aut alteram, quibus explicabatur, omisimus, quia ejus explicandi locus hìc non est.

Ceterum cùm hujus opusculi editio satìs mendosa sit, & cùm verosimillimum sit, non omnes Typographicos errores, in erratorum Indice, comprehensos fuisse; non pauca & conjecturâ correxi; sed quæ solùm ad stylum spectarent; & id quidem maximâ sobrietate, ita ut potiùs verear, ne reprehendar, quòd non satìs NEWTONI latinum sermonem ad nativum nidorem restituerim, quàm quòd nimis audacter id fecerim.

Opusculum XIX. è Transactionibus totum desumptum est. Latinè ab Auctoribus scripti fuerunt Articuli XII. XIII. XIV. XV. & XVI. cetera ex Anglo sermone verti. Ante Articulum XXXI. legitur in Transactionibus brevis dissertatio continens Refractionum historiam, & alia ad rem facientia, quam, quia NEWTONI non erat prætermisi.

Opusculum XX desumpsi ex HARRIS *Lexico Technico*, qui, illud à NEWTONO scriptum fuisse testatus, duo cum Auctoris veniâ affert exempla, latinum alterum autographum, alterum Anglicum à se concinnatum. Duo hæc exempla non paucis discriminibus inter se dissentiunt, quæ, licèt Auctori fuerint approbata, prætereunda censui, quia levissima sunt. Sed hoc adest notatu dignum. Pag. 414. lin. 11, & 12. Tomi nostri secundi habetur. *Si Particulæ acidæ minori proportione cum terrestribus jungantur, ut ab iis supprimi & occultari videantur.* Anglicum verò sonat. *Si hæ acidæ Particulæ jungantur terreis dumtaxat in parvâ Quantitate, adeò firmiter ab illis retinentur, ut omninò ab iis supprimi, & occultari videantur.* Et mihi quidem hæc secunda lectio ita primæ anteſtare videtur, ut diu dubitaverim an hanc afferrem, primàmque supprimerem, sed Editoris fidei magis consonum judicavi Textum fideliter exhibere, & de hoc discrimine hoc loco monere.

Ultimum locum occupat *Scala Graduum Caloris & Frigoris.* Edita hæc fuit in Transactionibus Philosophicis sine Auctoris nomine; sed eam apertè NEWTONO tribuit COTTESIUS

 aut

aut ejus Interpres. (*a*) Ad eam quoque respicere videtur NEWTONUS (*b*) ipse, dum ait, *Thermometro expertus sum, quòd septuplo solis æstivi calore aqua ebullit*, ut optimè notat Doctissimus Interpres. (*b*)

Sic igitur perlustrato Tomo secundo ad tertium veniamus.

De Opusculis TOMUM TERTIUM *conficientibus.*

De *Brevibus Chronicis* hæc habeo. (*c*) Dignissima *Walliæ* Princeps, & deinde Britanniæ Regina, quæ ab ipso NEWTONO nonnulla de Chronologiâ suâ didicerat, eum per virum doctrinâ & sanguine nobilissimum, *Abbatem* CONTI, Patricium Venetum tunc in Britanniâ degentem, accivit petitura ea, quæ de Chronologiâ scripserat. Ille, scripta hæc imperfecta esse caussatus, eorumdem summarium se confecturum recipit. Brevì conficit, affert, eò adigitur, ut ejus exemplum cum nullo communicandum *Abbati* CONTI impertiret. Hic postea, *Lutetiam Parisiorum* delatus, tantum thesaurum omnino celandum non putavit; quo factum est ut *Brevia Chronica*, in Gallicam Linguam à Clarissimo FRERETO versa cum quibusdam ejusdem observationibus, Auctore frustra renuente, ederentur *Lutetiæ Parisiorum* anno 1725. Deinde, post NEWTONI mortem, anglicè typis excusa fuerunt cum Chronologiâ, unde ego ea in Latinum sermonem verti. Ceterùm, de ipsâ *Walliæ* Principe, reor, verba facit (*d*) noster in Apologiâ suâ pro Brevibus Chronicis.

Asserit NEWTONUS ipse (*e*) se *Cantabrigiæ* degentem Historiâ & *Chronologiâ* reficere solitum, dum alia studia fatigatus

(*a*) Leçons de Phisique expérimentale &c. traduites de l'Anglois de Mr. *Cottes* &c. à Paris 1742. pag. 384.

(*b*) Princip. Mathemat. cum Comment. P P. *Thomæ le Sueur* & *Francisci Jacquier* Tom. III. Par. Prim. pag. 51. 52.

(*c*) Ex Elogio *Newtoni* supra cit. collato cum Opusc. XXIV. Hujus collec. T. III. pag. 275.

(*d*) Tom. III. hujus Collect. pag. 276. 277.

(*e*) Ibid. pag. 280.

tus intermittere cogebatur. Hinc orta est ejus *Chronologia*, quam ut publicæ luci destinaret, nondum animum inducere poterat anno 1725. Tamen, paulò ante quàm mortuus est, eam emendavit & edere constituerat (*a*), quod effectum fuit à CONDUITTO, ejus affine, anno 1728, qui monet (*b*), quòd, cùm Caput quintum cum aliis transcriptum non esset, dubitandum videbatur, an Auctor illud vulgare decrevisset. Quia tamen erat inter ejus scripta, &, (ut patet,) ad hujus operis prosecutionem pertinet, non omittendum censuit. Postea, eodem anno ab Anonymo, cui multum me debere fateor, in gallicam linguam versa typis vulgata fuit *Lutetiæ Parisiorum*.

Observationes ad DANIELIS *vaticinia, nec non ad Sancti* JOANNIS *Apocalypsim*, pariter post scriptoris interitum anno 1733 editæ fuerunt anglicè. Easdem latinitate donavit egregius verbi divini minister *Guilielmus* SUDERMANNUS qui eas edidit Amstelodami anno 1738. Cùm Doctissimus Interpres multum operæ in hac versione impenderit, & cùm illam optimè exceperint Docti, meliùs me facturum putavi, si eam afferrem, quàm si novam, multo minoris pretii certè futuram, concinnarem. Jam Interpretem ipsum de hoc NEWTONI libello, & de versione suâ loquentem audiamus.

Quas tibi offerimus, Lector, Illustrissimi NEWTONI lucubrationes, non commentarium, (quem vocant,) ad DANIELEM & *Apocalypsin*, continent. *Observationum* illis, quod attendas, nomen est. Non singula hìc explicantur verba; minùs, etiam, minutias sectatur Noster: nec ulla, tamen, in his vaticiniis extat res memorabilior, quæ, quò referenda sit, ipsius judicio, non, in genere, saltem, innuat. Ex ipsis rerum eventibus vaticinia interpretatur, & hos, quidem, limites prætergredi, summo jure, ipsi stultum ac ridiculum videtur. Ceterùm, absque ambagibus suam sententiam exponit, rerúmque gestarum historiâ illustrat.

†† 3 Superest,

(*a*) Monit. in Chronol. edit. Londinen.
(*b*) Ibidem.

Supereſt, ut quid, hac in verſione & editione, ego præſtiterim, paucis exponam. Quantùm potui Latinè locutus ſum; nec tamen, in rebus plerumque Eccleſiaſticis, omninò vocibus Barbaris abſtinere licuit; quibus ipſis, tamen, vix, niſi cùm vel prorſus, vel eâdem notione, Latinæ deërant, uſus ſum. Ceterùm multùm abeſt, ut ſtylus ſit, qualem vel ipſe cupiebam, vel reddere eum potuiſſe mihi videor. In alienis vertendis, ipſius Auctoris ſtylo, quantùm poſſit, inhærendum eſſe Interpreti cenſeo. Simpliciſſimus, verò, eſt ſtilus NEWTONI. Aliis nihilominus, phraſibus & vocibus hìc illic uti licuiſſet. Scias, autem, Lector, me, poſtquàm integram hanc verſionem adornâſſem adeò majorum negotiorum majori copiâ fuiſſe prohibitum quantùm decreveram temporis illi limandæ impendere, ut vel ipſa ejuſdem editio hac de causâ nunquam fortaſſe fuiſſet proditura, niſi illam fermè qualis eſſet emittere, in eorum gratiam qui Anglica non intelligunt, quàm premere, melius duxiſſem. Porrò, Sacræ Scripturæ loca, Noſtro citata, ſimpliciter, prout hìc ea vel ipſe vertit, vel ex Anglicâ verſione deſumſit, Latinè reddidi, nullam ex Latinis quæ exſtant verſionibus ſequutus, eò quòd ſæpiùs ipſa Anglicana verſio ab aliis, ſæpiùs etiam NEWTONUS ab illâ differt. Eodem modo egi in locis, Noſtro ex veteribus & Eccleſiæ Patribus citatis. Ubicumque Anglicè ea promebat, Latinè ea verti; ubicumque ipſe Latinè, ſive ex ſuâ, ſive ex aliorum interpretatione, ea dabat, verbotenus deſcripſi. Sæpiſſimè aliter facere omninò non licuit, multis eorum, quos citat NEWTONUS, Auctorum, non inſtructo; atque hoc ipſum in causâ fuit, quòd non ſemper, ubi ſuos ille Auctores adſcribit, & loca diſtinctè adnotat, num id rectè fecerit, conſulere potuerim. Sæpiùs, itaque, hoc factum, ſæpiùs etiam citationes indè emendatæ: ſæpiùs notata Auctorum, quos nomine tenus dumtaxat Noſter appellabat, loca. Sæpiùs, autem, fieri non potuit, cùm nec ipſos Auctores aliquando noſter innueret. Vitia, inſuper, Typographica ſuſtuli; ex. gr. p. 400. bis legebatur *Philometor*, tùm pro *Epiphane*, tùm pro *Seleuco Philopatore*. Aliquando tamen Lectores vitii monendos eſſe, cenſui,

censui, ut p. 326 &c. Aliquando, etiam, bis eadem occurrebant, ubi semel omittenda duxi; scilicet, non tantùm pag. 362 & 406, ubi illud monui, verùm etiam pag. 355 & 356. Præter animadversiones quasdam, & summaria rerum in margine, tres indices ad calcem adjeci. (Quorum duos rejeci, ne liber nimiùm excresceret, alterum inter meum invenies.)

De Notis, autem, pauca monenda sunt. Meas, ab illis quæ Auctori debentur, unciculis, quibus illæ includuntur, distinctas videbis. Longè autem plura adnotare erat animus, sed eadem, cujus mentionem feci, negotiorum majorum, & quæ minimè negligi fas est, copia, obstitit quò minùs variis rebus penitiùs investigandis otium suppeteret: quo si majori gavisus fuissem, de fundamentis expositionum NEWTONI & aliorum, præsertim quod ad vaticinium *de septuaginta hebdomadibus*, egissem distinctiùs. Eadem mihi otii penuria in causâ fuit, quare non examinaverim, num rectè, númve perperam Noster historias, (si qua de iis sit inter Viros Doctos controversia) referat; quod tamen aliquatenus feci ad initium Cap. IX. Et ad illud quidem caput, quid ad singula præstare intenderam, specimen exhibui. Non, itaque, credendum, me, ubicumque nihil notavi, vel ejusdem cum nostro esse sententiæ, vel nihil notandum duxisse. Multa erant præ manibus, verùm ulteriùs expendenda, aliique ad illa consulendi scriptores, priùs quàm par esset ea emittere: atque hæc omittenda potiùs, quàm non cocta satis tibi offerenda, videbantur. Uno loco, paginâ, scilicet, 422, ad hanc meam Præfationem te remitto, quòd, variis de causis, meliùs videbatur, hic, quàm illic, quæ necesse erat, monere. Docet ibi Noster, in variarum quæ memoraverat, superstitionum propagatione antesignanos fuisse Monachos, atque hisce ducem ANTONIUM. Egerat, autem, præcipuè de invocatione Sanctorum, atque hanc in Ecclesiam introductam dixerat honoribus, Sanctorum reliquiis exhibitis, eò maximè, quòd Ægyptii Martyrum cadavera inhumata, in lectulis, privatim in ædibus suis, servabant. Fuit, autem, in Angliâ, qui NEWTONUM postremæ oscitantiæ accusavit, eò quòd harum superstitionum

ſtitionum non tantùm eximium promotorem faciat ANTONIUM, verùm etiam, & hoc præſertim ex ATHANASII loco citato id probaretur: integer, enim ATHANASII locus, cujus partem Noſter citat, alieniſſimum ab iis ſuperſtitionibus fuiſſe ANTONIUM, judice hoc Anonymo, teſtatur. Hæc cùm accuſatio, fortè fortunâ, mihi innotuiſſet, ATHANASIUM conſulendum, atque omnia quò reſpicit, hìc deſcribenda cenſui. Ita, ergo, Epiſcopus Alexandrinus, *in Vitâ* ANTONII, versùs finem, *Operum Vol. II. pagg.* 501. *&c. Editionis Pariſienſis, annò* 1627. *Quis, verò, vitæ finis ipſi fuerit, æquum eſt & me commemorare, & vos cupidè audire, cùm & hoc æmulationem mereatur. Monachos, more ſuo, in monte exteriore viſebat: divináque providentiâ de vitæ ſuæ exitu certior factus; poſtremùm vos jam viſo, inquit fratribus, &c. — Ad hæc cùm fratres ipſum, ut maneret ſecum, vel invitum, adigere conarentur, ibidémque vitâ fungi, refragatus eſt, cùm alias ob multas cauſas, quòd ipſe ſilentio oſtendit, tùm ob hanc potiſſimùm: Amant Ægyptii piè defunctorum, atque in primis ſanctorum Martyrum corpora funerare quidem & linteis involvere; non autem mandare terræ, ſed, lectulo impoſita, intra privatos parietes retinere; mortuos eâ ratione honore ſe afficere exiſtimantes.* ANTONIUS *idcirco ſæpiùs Epiſcopos rogavit ut populum erudirent; ſimiliter etiam laïcis pudorem injecit, & mulieres objurgavit; hoc neque legitimum, neque omnino ſanctum eſſe adſerens. Nam & Patriarcharum & Profetarum corpora, ad hunc uſque diem ſepulchris ſervari, ipſum etiam Domini corpus in monumentum poſitum fuiſſe, ſaxum quoque obvolutum, quo tegeretur, donec die tertio reſurgeret. Quibus verbis peccare demonſtravit eum, qui poſt mortem, defunctorum corpora non humaret, quamvis ſancta eſſent: quid, enim, majus ſanctiúſve corpore Domini. Multi, ergo, hoc audito, poſtea ſub terram condiderunt cadavera, gratiáſque Deo egerunt, quòd tam probè inſtituti eſſent.* ANTONIUS, *autem, hujus moris gnarus, metuénſque ne & ſuo ita cadaveri facerent, poſt quàm Monachis, qui in exteriore erant monte, mandata dediſſet, ſeſe inde abſtulit, montémque interiorem ingreſſus, ubi commorari ſolebat, poſt menſes paucos in morbum incidit. Tum vocatis iis,*

qui

qui cum ipso erant (duo erant hi, qui & intus manebant, quindecim annos ἀσκούμενοι, eique, propter senectutem, ministrantes) ipsis dixit: Equidem, ut scriptum est, viam patrum proficiscor; me, quippe, à Domino vocari video: vos, autem, sobrii estote, nec diuturnam vestram ἄσκησιν perdite, sed, tanquam primordio jam capto, alacritatem animi vestri ut retineatis incumbite. Nostis insidiatores Dæmones, nostis quàm sint immanes quidem, at viribus imbecilles. Ne, igitur, istos timeatis, verùm potiùs semper Christum spirate, eique credite, ac vivite tamquam in dies morientes, ipsi vobis caventes, earúmque memores admonitionum, quas ex me audiistis. Nulla, porrò, vobis sit cum schismaticis consuetudo, neque omnino cum hæreticis Arianis: scitis enim qui & ego illos sim aversatus, propter perversam ipsorum Christóque adversam sectam. Σπουδάζετε δὲ μᾶλλον καὶ ὑμεῖς, ἀεὶ συνάπτειν ἑαυτοὺς, προηγουμένως μὲν τῷ Κυρίῳ, ἔπειτα δὲ τοῖς ἁγίοις· ἵνα μετὰ θάνατον ὑμᾶς εἰς τὰς αἰωνίους σκηνὰς, ὡς φίλους καὶ γνωρίμους, δέξωνται καὶ αὐτοί. Ταῦτα λογίζεσθε, ταῦτα φρονεῖτε. καὶ εἰ μέλει ὑμῖν περὶ ἐμοῦ, καὶ μνημονεύετε ὡς περὶ πατρὸς· μὴ ἀφῆτέ τινας τὸ σῶμά μου λαβεῖν εἰς Αἴγυπτον, μή πως ἐν τοῖς οἴκοις ἀπόθωνται. τούτου γὰρ χάριν εἰς ἦλθον εἰς τὸ ὄρος, καὶ ἦλθεν ὧδε. οἴδατε δὲ καὶ πῶς ἀεὶ ἐνέτρεπον τοὺς τοῦτο ποιοῦντας, καὶ παρήγγελλον παύσασθαι τῆς τοιαύτης συνηθείας. θάψατε οὖν τὸ ὑμέτερον ὑμεῖς, καὶ ὑπὸ γῆν κρύψατε. καὶ ἔσω τὸ παρ' ἐμοῦ ῥῆμα φυλαττόμενον παρ' ὑμῖν, ὥστε μηδένα γινώσκειν τὸν τόπον, πλὴν ὑμῶν μόνων. ἐγὼ γὰρ, ἐν τῇ ἀναστάσει τῶν νεκρῶν, ἀπολήψομαι παρὰ τοῦ Σωτῆρος ἄφθαρτον αὐτό. [*Vos, autem, & ipsi potiùs operam navate ut adhæreatis, primò, quidem, Domino, deinde Sanctis; ut post mortem vos, in æterna tabernacula, tamquam amicos & notos, & ipsi recipiant. Hæc observate, hæc animadvertite, ac si qua vobis mei cura, & instar patris mei mementote. Ne sinatis ullos meum cadaver in Ægyptum ferre, ne quando in suis domibus id deponant. Propterea, enim, in montem abii, & huc veni. Scitis, autem, & quomodo semper objurgaverim illud facientes, & adhortatus sim ut mitterent illum morem. Vos, itaque, meum cadaver sepelite, & sub terrâ condite: ac observetur à vobis id quod dixi, adeò ut nemo, præter vos solos, locum sciat. Ego, enim, in resurrectione*

mortuorum, illud incorruptum à Servatore recipiam.] Censet Anonymus nullam esse, quâ ingentis criminis absolvatur NEWTONUS, rationem, nisi vel ipsum ATHANASIUM non legisse, sed tantùm, hæc, alii citata, memoriæ causâ notâsse, postea exactiùs expendenda; vel has posthumas Observationes, ut alias aliorum magnorum virorum, nihil esse, præter adversaria, è quibus opus ejusmodi componere mors Auctorem prohibuit. Postrema conjectura non omnino præter rationem videtur. Attamen & aliâ ratione, criminis certè magni, absolvi NEWTONUS possit, etiam si ipse, quo modo eæ sunt editæ, has Observationes perscripserit. Scilicet, nihil aliud culpat ANTONIUS, nisi corpora inhumata servari; nihil aliud vetat, nulli alii rei moribundus prospicit, nisi ne suum inhumatum servetur. Miraculorum edendorum virtutem ossibus Sanctorum adscribere non vetat; nec magis animarum eorum invocationem. Quin hanc potiùs, quæ superstitionum NEWTONO est cumulus, tacitè probat, jubendo ut Discipuli sui *Sanctis adhæreant, ut & hi ipsos, post mortem, quasi amicos & notos, recipiant in æterna tabernacula.* Minimùm Sanctorum animabus, rerum, quæ in terris aguntur, conscientiam, tacitè adscribit: quod satis profectò esse queat, nec multùm superstitioni deditis hominibus, ut haud frustra sese illas invocaturos credant.

Hæc etiam adnotanda proponit vir omni laude dignus.

Ad ea, quæ leguntur pag. 336. 337. (Cùm Noster Senatum populúmque & Principatum Romanum inter decem cornua, Cap. VI. non memoraverit, Imperiíque veteris Romani reliquias jam in regno Ravennæ statuerit, manifestum est, humani aliquid passum fuisse Virum Summum cùm hæc scriberet.)

Ad pag. 410. lin. 2. à fine [Errat NEVVTONUS, cujus memoriæ non rectè obversatus esse sequens locus ATHANASII (in fine Præfationis ad Vitam ANTONII) videtur. Διὰ τοῦτο ἅπερ αὐτός τε γινώσκω, πολλάκις γὰρ αὐτὸν ἑώρακα, καὶ ἃ μαθεῖν ἠδυνήθην παρὰ τοῦ ἀκολουθήσαντος αὐτῷ χρόνον οὐκ ὀλίγον, καὶ ἐπιχέαντος ὕδωρ κατὰ χειρὸς αὐτοῦ, γράψαι τῇ εὐλαβείᾳ ὑμῶν ἐσπούδασα. *Propterea & quæ ipse novi, (sæpe, enim, illum vidi,) & quæ discere ab eo potui*

potui, qui non parum temporis ipsum sequutus est, & aquam manibus adfudit, vestræ benevolentiæ scribere diligenter studui.]

Totam Præfationem, utpote longiusculam, non descripsi, hæc afferre contentus, quæ præcipua visa sunt.

Ultimum Opusculum de *Sacro Judæorum Cubito &c.* Latinè ab Auctore scriptum, Anglicè editum fuit inter Opera miscellanea Celeberrimi *Johannis* GRAVII, Tom. II. pag. 405. ann. 1737. *Londini*, unde nos illud desumpsimus.

En, Lector optime, quæ tibi in præsentia possum offerre. Si meum rem tibi gratam & utilem faciendi studium non displiceat, voti reus factus sum. Ceterùm, in versionibus meis perspicuitatem sum potiùs quàm elegantiam secutus. Res ipsa id petere videbatur, tum, quia Mathematica, Physica, & hujuscemodi sunt dilucidè tradenda, tum, quia NEWTONI stylus (cui meum accommodandum censui,) omnino simplex est & omni ornamento destitutus præter illud, quod sponte gignunt verba, cùm

— — provisam rem non invita sequuntur (*a*).

Præterea, frustra, fateor, elegantiam essem venatus. Nam, & profectò patet

— — — *Anglorum* obscura reperta
Difficile inlustrare Latinis versibus esse,
(Multa novis verbis præsertim cúm sit agendum,)
Propter egestatem linguæ, & rerum novitatem (*b*);

& Romanè

Judice, quem nosti, CLERICO (*c*)

scribere solùm datur illi, qui per aliquot annos, ceteris omnibus neglectis, optimos illius linguæ Auctores diurnâ nocturnâ-

 que

(*a*) Horat. Art. Poet. vers. 311.
(*b*) Lucret. de rerum nat. Lib. I. vers. 137. 138. 139. 140.
(*c*) Cler. Biblioth. Ant. & Nov. Tom. 25. pag. 381.

que manu verſavit. Mihi verò, ab ineunte ætate, rebus potiùs quàm verbis addiſcendis deſtinato, quantùm voluiſſem operæ Latinis Litteris navare non licuit. Sed, peropportunè accidit, ut hìc ornamenta non requirantur, perſpicuitas & fidelitas ſufficiant. Quæ duo utrùm præſtiterim, penes Doctos judicium eſto. Nihil certè, quod ad utrumqne, & præcipuè ad fidelitatem verſionis, conduceret, prætermiſi. Quandoquidem, poſtquàm, quantâ potui diligentiâ opuſculum aliquod ſum interpretatus, illud cum Gallicâ, ſiqua aderat, verſione accuratè contuli, aut, quantùm licuit, cum Viris rerum ipſarum, & Anglicæ ac Latinæ Linguæ peritiſſimis emendavi. Quamobrem illis à me debetur gratia maxima, eóſque obſecro, ut publicum hoc grati animi teſtimonium non reſpuant. Quamquam autem totis viribus errores vitaverim, eos non evitavi, ſatis ſcio. Tuam, igitur, cùm pro meis, tum pro Typographorum mendis clementiam imploro, Lector benigne. Vale, & memento quòd, humanæ naturæ vitio,

—— Opere in longo fas eſt obrepere ſomnum (*a*).

(*a*) Horat. Art. Poetic. verſ. 360.

D E

DE VITA

ISAACI NEWTONI

COMMENTARIOLUS.

ISAACUS NEWTONUS, natus est *Woolstropiæ* in *Lincolni* Regione ipso *Nativitatis Dominicæ* die (Veteri Stilo) anno 1642; originem suam referebat ejus familia ad natu maximum *Johannis* NEWTONI Equitis aurati, & *Woolstropiæ* Domini, filium. Hujus Gens per totos ducentos annos in *Woolstropiam* dominata fuerat, ubi se transtulerat ex *Westby* in eâdem Regione; orta autem erat *Newtoni*, quæ *Lancastri* Urbs est. Matrem habuit ISAACUS noster *Annam* ASCOUGH, antiquo genere prognatam, quæ, cùm Virum, Auctoris nostri patrem, amisisset, iterum nupsit. Hæc filium suum, duodecim annos natum, misit in publicum *Granthami* Ludum litterarium, unde illum aliquot pòst annis removit, ut res suas ipse curare consuesceret. A quo negotio tam alienum, & tam libris suis deditum experta est, ut eum *Granthamum* remitteret, quò sibi posset indulgere. Hinc transiit ad Collegium *Trinitatis* in Universitate *Cantabrigiensi*, anno 1660, ætatis annum agens duodevicesimum. Auctor est FONTENELLIUS (*a*) eum, Mathemata discere cupientem,

operam

(*a*) *Histoire de l'Acad. Royale des Sciences.* An. 1727, *Elog. Newt.*

operam *Euclidi* non dedisse, utpote qui nimis perspicuus, nimis simplex, & indignus, in quo pervolvendo tempus tereretur, illi videbatur. PEMBERTONUS ferè eadem narrat; affirmat (*a*) enim se NEWTONUM sæpiùs querentem audiisse, quòd Mathematum curriculum aggrediens totum se tradidisset libris CARTESII & aliorum *Algebristarum*, minus attentè perlectis EUCLIDIS elementis, quam tantus Auctor merebatur. Perfunctoriè igitur evolutis elementis sedulam operam dedit CARTESII *Geometriæ*, & KEPLERI Opticis. Patet ex ejus expensi rationibus illum SCHOOTENII *Miscellanea*, & CARTESII *Geometriam*, atque WALLISII opera emisse anno 1663 paulò ante diem quo *Domini* nativitas celebratur. Hos libros, dum legebat, notis & observationibus augebat, ac scientias, de quibus agebant, multùm promovebat. Sic (*b*) annis 1664, 1665, dum proferre conabatur *Wallisianam* interpolationem, excogitavit rationem Serierum obtinendarum per Radicum Extractionem & per Divisionem. Anno 1664 artium Baccalaureus factus est. Anno (*c*) 1666 admirandæ suæ Opticæ fundamenta jecit; & anno 1668 artium Magister creatus fuit, cùm jam Collegii socius fuisset electus. Hoc eodem anno, mense *Septembri* (sunt verba (*d*) Clarissimi COLLINSII) MERCATOR *Logarithmotechniam* edidit suam, quæ specimen hujus Methodi, (videlicet *Serierum infinitarum*) in unicâ tantùm Figurâ, nempe Quadraturam *Hyperbolæ* continet. Haud multo postquam in publicum prodierat liber, exemplar ejus Clarissimo WALLISIO *Oxoniam* misi . . . . ., aliúmque BARROVIO *Cantabrigiam*, qui quasdam NEWTONI chartas (*e*) . . . . extemplo remisit. E quibus, & ex aliis, quæ olim ab Auctore cum BARROVIO communicata fuerant, patet illam Methodum à dicto NEWTONO aliquot annis antea excogitatam, & modo universali applicatam fuisse; ita ut ejus ope in quâvis Figurâ curvilineâ propositâ, quæ unâ vel pluribus proprietatibus definitur, Quadratura vel Area dictæ Figuræ, accurata, si possibile sit, sin minùs, infinitè vero propinqua; Evolutio vel Longitudo Lineæ curvæ; Centrum Gravitatis Figuræ; Solida ejus rotatione genita, & eorum Superficies, sine ullâ Radicum Extractione, obtineri queant; quo invento, ait Celeberrimus FONTENELLIUS (*f*), nihil subtilius nihil felicius excogitari potest ad opem humani intellectûs imbecillitati ferendam.

Tamen tanta erat NEWTONI modestia, ut (*g*) *maturam ad scribendum*

(*a*) Pembert. *Pref. in a View of Sir* Isaac Nowton's *Philosophy*.
(*b*) Vide Tom. I. hujus, pag. 329 -- 332.
(*c*) Vide Tom. II. hujus, pag. 379.
(*d*) Comm. Epistol. N°. XXIV. pag. 103. edit. sec.
(*e*) Hæ chartæ sunt *Analysis per Æquationes numero Terminorum infinitas*.
(*f*) Loco citato.
(*g*) Vide Tom. I. hujus, pag. 333.

dum ætatem expectaret, licèt, vel MERCATOREM ipſum jam *noſſe* (*a*) *Extractionem Radicum æquè ac Diviſionem*, *vel alios ſaltem*, *Diviſione patefactâ inventuros reliqua* ſuſpicaretur; id eſt, licèt alios inventionis gloriam occupaturos putaret. Libellus igitur de *Seriebus*, quem conſcripſerat, communicatus tantummodo fuit cum COLLINSIO & *Vice-Comiti* BROUNCHERO. Electus fuit anno 1669. Mathematum Profeſſor in Univerſitate *Cantabrigienſi*, quam Provinciam BARROVIUS abdicaverat. Eodem anno & duobus proximis publicè prælegit *Lectiones Opticas*, illas, quas nos exhibuimus (*b*), quæ, in Anglicum ſermonem converſæ, editæ fuerunt *Londini* anno 1728 in 8vo., & poſtea Latinè, quemadmodum ſcriptæ fuerant pariter Londini an. 1729 in 4°. Ibi continentur ea, quæ de Luce & Coloribus detegere cœperat anno 1666, & de quibus docuit *Regiam Societatem* anno 1671, ſcripto quodam, quod inſertum fuit *Philoſophicis Tranſactionibus* Februarii 19 an. 1672. N°. 80. (*c*). Hinc ortæ ſunt plures controverſiæ, quæ NEWTONUM, illarum inimiciſſimum, à *Lectionibus* ipſis edendis cum *Tractatu de Methodo Serierum infinitarum & Fluxionum* abſterruerunt (*d*). In iiſdem *Tranſactionibus* Martii 28 an. 1672 N°. 81. deſcripſit novum *Cata-Dioptricum Teleſcopium* à ſe excogitatum, quam deſcriptionem Doctiſſimus *Abbas* GALLOIS inſeruit in Eruditorum Diario Februarii 29 an. 1679, additâ HUGENII Epiſtolâ (*d*), quâ Vir omni laude major oſtendit quot & quantis commodis hoc genus Teleſcopia cetera antecellant. Adſunt in *Philoſophicis Tranſactionibus* alia ſcripta (*e*) ad Teleſcopium hoc, & ad novam Theoriam de *Luce & Coloribus* pertinentia, quæ Auctoris ingenium, diligentiam, atque perſpicacitatem in propatulo ponunt. Anno 1672 edidit *Cantabrigiæ* in 8vo. librum, cui titulus *Bernardi* VARENII *Geographia generalis*, *in quâ affectiones generales Telluris explicantur*, *aucta & illuſtrata ab* ISAACO NEWTON, quæ rurſus excuſa fuit, pariter in 8vo., anno 1687; ſed ea, quæ NEWTONUS, publicæ utilitati ſtudens, & gloriam ſuam negligens, contulit ad eam augendam & illuſtrandam, ita cum reliquis confuſa ſunt, ut ab iis diſtingui, nedum ſeparari nequeant. Hyeme illo, qui finis fuit anni 1676, & principium anni 1677, NEWTONUS demonſtravit quòd, *ſi vires centripetæ reciprocè ſint ut Quadrata diſtantiarum*, *Planeta motu ſuo deſcribet Ellipſim circa Centrum virium ſitum in inferiore Ellipſeos Foco*, &, *Radiis ad hoc Centrum ductis*, *Areas deſcribet Temporibus proportionales*. Anno 1683 hoc argumentum rurſus meditari cœpit, & jam detectæ Propoſitioni nonnullas alias ad cœleſtia Corpora ſpectantes adjecit; inter quas non ultimum locum occupat Demonſtratio notiſſimæ illius *Keplerianæ* Propoſitionis, quòd, ſcilicet, *Planetæ in Ellipſibus moventur*; &, *ſi Radii ducantur*

(*a*) Tom. II. pag. 75. &c.
(*b*) Tom. II. hujus, pag. 279.
(*c*) Vide Tom. I. hujus, pag. 334.
(*d*) Vide Tom. II. hujus, pag. 295. ad 300.
(*e*) Vide Tom. II. hujus, p. 301. ad 409.

tur ad Solem situm in inferiore Ellipseos Foco, Areas Temporibus proportionales describunt. Hanc Demonstrationem misit Celeberrimo HALLEIO mense Decembri 1684, qui eam cum *Regali Societate* communicavit, & in hujus Tabulariis inscripta fuit. Celeberrimâ hac *Societate* rogante, & HALLEIO etiam pervicaciter contendente, ad id adductus tandem fuit NEWTONUS, ut sua *Principia* scriberet, quorum duo priores libri manu exarati *Regali Societati* lecti fuerunt; sed, cùm HOOKIUS se ante nostrum Auctorem KEPLERI Problema demonstravisse contenderet, tertium librum supprimere statuit NEWTONUS, quod tamen ne faceret ejus Amici exoraverunt. Asserit PEMBERTONUS (*a*), quòd prima cogitata, quibus ad *Principia* sua manuductus fuit, ei in mentem venerunt anno 1666, cùm *Cantabrigiâ*, metu Pestilentiæ, recessisset. Nam, solus in hortis deambulans Gravitatis vim, (aliqui dicunt à pyro cadente admonitus) considerare cœpit; quòd, nempe, quoniam hæc vis sensibus non deprehenditur imminuta ad maxima à Terræ Centro intervalla, ad quæ pervenire liceat, neque ad fastigia altissimorum ædificiorum, neque etiam ad sublimiorum montium cacumina inde conficiendum probabiliter videtur, quòd hæc vis multo latiùs patet, quàm vulgo credi soleat; quidni ad Lunam usque, tacitus dicebat? Si verò ita se res haberet, certè vim istam Lunæ motus sentiret, & ab eâ fortasse Luna in orbitâ suâ retineretur. Quanquam autem vis Gravitatis non mutetur, (quod quidem sensibus percipi possit,) exiguis mutationibus intervallorum à Centro telluris, ad quæ evadere possumus, tamen arbitrabatur fieri posse, ut hæc vis multò minor esset apud Lunam, quàm apud nos. Detecturus quanta esset hæc imminutio, secum ipse reputabat, quòd, si Lunam in orbe suo retinet vis Gravitatis, procul dubio Planetæ primarii circa Solem à non absimili vi circumducuntur. Et, plurium Planetarum Periodos cum eorumdem à Sole intervallis comparans, invenit, quòd, si quæ vis Gravitati similis Planetas in suis orbitis continet, hæc decrescere debet in duplicata ratione incrementorum distantiarum; ad quam conclusionem venit, ponens Planetas accuratè describere Circulos Soli concentricos, à quibus quidem circulis orbes à pluribus Planetis descripti vix differunt. Igitur, supponens vim Gravitatis, ad Lunam usque se extendentem, in eadem ratione decrescere, rationes subducere cœpit, perspecturus utrùm hæc vis ad Lunam in orbitâ sua retinendam sufficeret. Cùm verò tunc libris destitueretur, posuit, quemadmodum Geographi passim, & Angli Nautæ, antequam NORVOODUS Terram esset dimensus, arbitrabantur, quòd unus Latitudinis gradus in terrestri superficie sexaginta milliaria Anglica complectitur; sed, quoniam hæc hypothesis à verò non parum aberrat, quandoquidem singuli gradus novem & sexaginta

(*a*) Pembert. *Pref. in à View of Sir* Isaac Newton's *Philosophy.*

ſexaginta milliaria Anglica cum dimidio, circiter, continent, hinc factum eſt, ut ejus rationes ſpem fallerent; hinc opinatus eſt aliquam aliam cauſam ſaltem jungendam eſſe vi Gravitatis in Lunam agentis. Eâ de re hujus argumenti conſiderationem aliquamdiu intermiſit. Sed aliquot annis poſt HOOKII epiſtola eum excitavit ad inveſtigandum quamnam Lineam reipſa deſcribat corpus è ſublimi cadens, ſi Terræ circa ſuum Axem motus non negligatur. Hujuſcemodi Corpus, cùm ſervet motum illum, quem Terræ revolutio tribuit loco, quem cadendo deſerit, conſiderari debet tanquam anteriorem partem versùs projectum, & ſimul tractum deorſum, ad Terræ Centrum. Hinc iterum ad meditandum Lunæ motum animum adjecit; atque uſus Terræ dimenſionibus, quas paulò priùs Celeberrimus PICARTUS conſtituerat, Lunam in orbe ſuo retineri à ſolâ Gravitatis vi perſpexit: unde ſequebatur hanc vim decreſcere quò magis à Terræ Centro receditur, quemadmodum ipſe jampridem conjecerat. Ex hoc principio deduxit Lineam à cadente Corpore deſcriptam eſſe Ellipſin, cujus Focus alter eſt Terræ Centrum. Et, quoniam primarii Planetæ circa Solem in gyrum acti Ellipticos Orbes deſcribunt, diſquiſitionem hanc, quam animi gratiâ ſuſceperat, ad altiora poſſe accommodari non ſine voluptate cognovit. Compoſuit igitur, duodecim, præterpropter, Propoſitiones ad Planetarum præcipuorum circa Solem motum pertinentes. Aliquot pòſt annis, ſermonibus HALLEII, qui, eum inviſurus, *Cantabrigiam* petierat, eo adductus eſt, ut rurſus meditationes ſuas ad hoc argumentum converteret, atque inde de hac re librum, cui titulus *Philoſophiæ naturalis Principia mathematica* divulgavit. Hic liber tot, & tam accuratè excogitatarum rerum plenus, duodeviginti menſibus conſcriptus fuit, quamquam ferè nullam, præter eam quam retulimus, ſuppellectilem ſibi paraviſſet. Hactenus PEMBERTONUS. Hic liber primò editus fuit *Londini* in 4°. anno 1687; atque iterum pluribus in locis ab Auctore auctus & emendatus *Cantabrigiæ* anno 1713 in 4° curante *Rogero* COTTESIO, Viro illuſtriſſimo, & in eâ Univerſitate Aſtronomiæ atque Phyſicæ experimentalis Profeſſore: Tertiò *Amſtelodami*, anno 1714; & denique *Londini* anno 1726 curâ *Henrici* PEMBERTONI rurſus auctus. Hic liber, (juxta FONTENELLIUM (*a*),) in quo novum Philoſophiæ Syſtema profundiſſimæ Geometriæ ſuperſtruitur, ſtatim omnes illas laudes non obtinuit, quas merebat, & quas aliquando habiturus erat. Quoniam acutiſſimè cogitata multa paucis verbis efferuntur, & ex principiis ſummâ celeritate deducuntur ea, quæ inde confici poſſunt, atque Lector non pauca, quibus principia & concluſiones connectantur, proprio marte ſupplere debet, tempore opus erat ut intelligeretur. Mathematicorum Principes diligentem & ſedulam operam illi navare coacti ſunt,

[*a*] Hiſt. de l'Acad. Royale des Sciences, An. 1727. Elog. de *Mr. Newton.*

& ii, qui minùs ingenio & doctrinâ pollebant, illud mare navigare non sunt aggressi, nisi quando Principum testimonia animos addiderunt. Sed tandem, quando libri pretium satis perspectum fuit, undique concurrerunt suffragia, quæ tam lentè sibi adquisiverat, & omnia plausus compleverunt. Omnes mirati sunt mentem rerum inventricem, & quasi creatricem, mentem, quæ, si minus modesta fuisset, meliori, quàm LUCRETIUS, jure exclamare potuisset,

> Avia Pieridum peragro loca, nullius antè
> Trita solo; juvat integros accedere fontes,
> Atque haurire . . . .

mentem, quam in sæculo felicissimo vix unus aut alter è totâ Doctorum Republicâ sortiuntur. Et, quò quisque magis ingenio pollebat, eò magis mirabatur, ita ut HOSPITALIUS ille, Eruditorum nobilissimus, & Nobilium eruditissimus, ab Anglis (*a*) eum invisentibus petere soleret, NEWTONUS-*ne vester, edit, bibit, dormit, ut homines alii faciunt? Ego quidem illum mihi fingo tanquam Genium*, & mentem à corporeis vinculis omninò solutam. Innituntur *Principia Mathematica* duabus præcipuè *Theoriis*, doctrinâ virium centralium, & Mediorum resistentiâ: utraque ferè prorsus nova est, & per sublimem Auctoris nostri Geometriam explicata. KEPLERUS ex cœlestibus TICHONIS observationibus tria confecerat. *Primò*, quòd iidem Planetæ æqualibus temporibus æquales Areas circa Solem describunt. *Secundò*, quòd per Ellipses moventur, in quarum communi Foco est Sol. *Tertiò*, quòd, in diversis Planetis, Quadrata ex temporibus periodicis sunt ut Cubi ex transversis Orbitarum Diametris. Ex *primo* Phænomeno confecit Auctor Planetas versùs Centrum Solis attrahi. Ex *secundo* vires hujus attractionis esse, reciprocè, ut Quadrata spatiorum, quibus Planetæ distant à Solis Centro. Ex *tertio* denique Planetas omnes eandem Centripetam vim sentire. Eodem anno, quo *Principia* ista fuerunt edita, Rex JACOBUS II. privilegia Universitatis *Cantabrigiensis* aggressus est, pro quibus, inter alios, acerrimè stetit NEWTONUS, qui fuit inter illos, quos Universitas ad *Alti Consessûs* Curiam delegavit. Electus pariter fuit unus ex ejus Membris; dum anno 1688. *Pactionis Comitia* fuerunt coacta, quibus adfuit quamdiu manserunt. Anno 1696 Illustrissimus MOUNTAGUE, tunc *Scaccarii Cancellarius*, & postea *Comes Hallifaxius* illi à Rege GULLIELMO munus Custodis pecuniæ feriundæ obtinuit, quo munere dum fungeretur, eximia fuit ejus opera quando nummi jam cusi novis imaginibus signandi fuerunt. Tribus annis pòst creatus fuit Magister Fabrorum nummos cudentium, unde non exiguum lucrum ei redibat, & hoc munere, quoad vixit, potitus

(*a*) *Des Maizeaux.* Recueil de diverses Pieces sur la Philosophie &c. Pref.

potitus est. Anno 1699 in *Regiam Scientiarum Academiam*, quæ *Lutetiæ Parisiorum* floret, cooptatus fuit. Anno 1701 iterùm ab Universitate *Cantabrigiensi* Comitiorum Membrum electus fuit. Anno 1703 creatus fuit Præses *Regalis* apud *Londinenses Societatis*, quam Dignitatem per totum vitæ suæ tempus, hoc est, tres & viginti continuos annos, obtinuit. Anno 1704 edidit *Londini* in 4°. suam *Opticam*, seu librum de Reflexionibus, Refractionibus, Inflexionibus, & Coloribus Lucis; qui liber auctus iterùm typis excusus fuit pariter *Londini* anno 1718 in 8vo., ac tertiò anno 1721 in 8vo. In Latinam linguam versus ex primâ editione à Celeberrimo *Samuele* CLARKE editus fuit *Londini* anno 1706 in 4°. & ex secundâ anno 1719 pariter *Londini* in 4°. Illustris *Petrus* COSTE eumdem Gallicâ Linguâ donavit ex editione secunda, & sic versum edidit *Amstelodami* 1720 in 12mo. in duo volumina divisum, & *Lutetiæ Parisiorum* eâdem formâ anno 1722. Juxta ingeniosissimum FONTENELLIUM (*a*) hic liber totus circa Lucis Anatomiam versatur. Tenuissimus Lucis Radius in cubiculum prorsus obscurum intromissus, (qui tamen, quantumvis sit exilis, semper est quasi *Fasciculus* ex infinito Radiorum numero constans,) ita dividitur & dissecatur, ut exhibeat tandem elementares componentes Radios ab aliis segregatos, atque singulos propriis Coloribus imbutos, &, post hanc separationem, nullis mutationibus obnoxios. Omnes hi Radii diversimodè colorati, si commisceantur, eo ipso Albedinem, quâ totus Radius præditus est, constituunt atque progignunt. Primigenii & colorati Radii, numquam fortasse separari potuissent, nisi ita naturâ comparati fuissent, ut, dum idem Medium, idem vitreum Prisma transmeant, sub diversis Angulis refringerentur, & hoc pacto, ad commoda intervalla excepti, disgregati comparerent. Hæc varia rubei, flavi, viridis, cœrulei, purpurei, & aliorum mediis coloribus distinctorum quamplurium Radiorum refrangibilitas, de quâ nulla fuerat suspicio, & ad quam vix conjiciendo poterat deveniri, est præcipua veritas circa quam hic NEWTONI liber versatur. Ab hac ducimur ad variam reflexibilitatem. Quinimo, radii sub eodem angulo super eamdem superficiem cadentes alternè refringuntur & reflectuntur. Præterea, Radii qui prope Corporum extremitates transeunt, licèt illa non tangant, attamen à Lineâ rectâ detorquentur, quæ sola res non primùm NEWTONO perspecta fuit, & *inflexio* nuncupatur. Ex his omnibus exsurgit nova Optica, ab aliis tam diversa, ut hæc Scientia tota Auctori nostro debita videatur. Huic libro, cùm primùm editus fuit, subjecit Tractatus duos, *de Speciebus & magnitudine Figurarum curvilinearum*, hoc est, *de Quadraturâ Curvarum*, & *Enumeratio Linearum tertii ordinis*, quos deinde sustulit, quia de rebus nimiùm ab Opticâ alienis agebant. Anno 1705 Eques creatus fuit ab ANNA Reginâ.

[a] Mémoir. de l'Acad. Royal. des Sciences, an. 1727. Elog. de *Mr. Newton.*

Anno 1707 *Cantabrigiæ* primùm edita fuit ejus *Arithmetica Universalis*, *sive de Compositione & Resolutione Arithmeticâ liber*; idque inscio Auctore, atque etiam, quando rescivit, ægrè ferente (*a*). Illum scripserat NEWTONUS triginta ferè annis antequam ederetur, anno nempe 1677, cùm Mathemata *Cantabrigiæ* profiteretur, & quidem currenti calamo, pro urgentis officii ratione, & ejus exemplum, pro more, in Universitatis Tabulariis reliquerat, unde editus fuit. Secundò editus fuit *Londini* anno 1722; sed in statu perfectiore, (ut Clarissimi s'GRAVESANDE verbis utar (*b*),) ut quis facilè percipiat non omninò fœtum abdicâsse Virum Celeberrimum. Eundem satis amplo Commentario, quem suadente eodem s'GRAVESANDE jam diu perfeci, in lucem proditurum propediem, & hoc ipso fortassis anno, spero. Anno 1711 vulgata fuit ejus *Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones, & Differentias, cum Enumeratione Linearum tertii ordinis*, *Londini* in 4°. à *Gulielmo* JONES, Armigero, qui primùm illam reperit inter scripta *Joannis* COLLINSII, quæ anno 1669 à BARROVIO acceperat. Anno 1712 plures NEWTONI epistolæ impressæ fuerunt in libello, cui titulus *Commercium Epistolicum* D. Joannis COLLINS *& aliorum de Analysi promotâ, jussu Societatis Regiæ editum.*

GEORGIO I. regnum obtinente meliùs etiam in Aulâ cognitus fuit NEWTONUS, quandoquidem ornatissima *Walliæ* Princeps, ac deinde *Britanniæ* Regina illum pluribus de rebus ad sublimiores disciplinas pertinentibus interrogare solebat, & à respondentis ore pendebat, ita ut sæpè se felicem prædicaverit, cui eodem, quo NEWTONUS, tempore vivere, illúmque audire contigisset. Scripserat hic de Chronologiâ librum, quem in lucem non emittere decreverat; at optima Princeps, cum quâ præcipua sui Systematis chronologici capita communicaverat, tantum novitatis & ingenii in illis perspexit, ut sibi summarium optaverit, quod nemini daret, & apud se summâ fide & diligentiâ servaret. Veruntamen unum hujus Summarii exemplum in Galliam pervenit, ubi in Gallicam Linguam conversum fuit & editum *Lutetiæ Parisiorum*, cum nonnullis in illud observationibus. Quapropter NEWTONUS Transactionibus Philosophicis inseruit animadversiones quasdam in has observationes, quæ animadversiones itidem Gallicâ Linguâ donatæ fuerunt, typisque divulgatæ *Lutetiæ Parisiorum* anno 1726 in 8vo. cum epistola Excellentissimi *Abbatis* CONTI, quâ respondebat ad nonnulla, quæ de eo dixerat NEWTONUS in suis animadversionibus. Anno autem 1728 ipsa Chronologia edita fuit *Londini* in 4°. In eo libro præcipuè de hoc agitur, ut acutè sanè & ingeniosè, legendo tenuissima nonnulla vetustioris Græcorum Astrologiæ vestigia, investigetur quemnam locum tempore *Chironis Centauri* Colurus

[*a*] *s'Gravesande* præfat. in Arithm. Universf. *Newtoni* edit. *Lugd. Batav.* 1732.
[*b*] Ibidem.

Colurus Æquinoctiorum occuparet. Siquidem, quoniam hodie notum est fixas Stellas unum in Longitudinem Gradum peragrare spatio annorum duorum & septuaginta, si sciremus per quas Stellas transiret Colurus ille CHIRONIS temporibus, dimetiendo intervallum, quo distant Stellæ, per quas nunc transit, ab illis per quas tunc transibat, facilè quot anni à *Chironis* tempore ad præsens elapsi sint, determinaretur. Et, quia CHIRON fuit inter *Argonautas*, hinc notissimæ hujus expeditionis, & idcirco *Trojani* belli tempus definiretur, duorum nempe maximorum facinorum, ex quibus tota vetus Chronologia pendet. Ea statuit NEWTONUS totis annis quingentis recentiora, quàm alii vulgò Chronologi. Contra hoc Systema scripserunt duo docti *Galli*, atque tres *Angli*, *Arthurus* BEDFORD, & *Samuel* SHUCFORD in præfatione ad secundum Volumen suæ *Connexionis Historiæ sacræ atque profanæ*, atque WARBURTON in Sectione V. Lib. IV. *de Divinâ Mosis legatione.* Ceterùm non tantùm suis laboribus orbem litteratum ditavit, sed etiam alios ad idem compulit, ut de se testatur VOODWARDUS (*a*).

Bonâ valetudine usus est ad octogesimum ætatis annum usque, quo urinæ incontinentiâ affligi cœpit; attamen quinque sequentibus annis, per satis magna intervalla bene se habuit, aut certè non malè, quod prudenti victûs ratione, curisque, quarum antea non indiguerat, efficiebat. Provinciam suam curandæ Monetæ Nobili Viro CONDUITTO, qui NEWTONI Neptem uxorem duxerat, demandare coactus fuit. Magnos dolores nunquam perpessus est præter viginti postremos vitæ suæ dies; tunc pro certo creditum est eum calculo laborare, & valetudinem recuperare non posse. Dum tantis doloribus cruciabatur, ut sudor largiter per vultum difflueret, nunquam ejulatum edidit, aut eos ægrè se ferre testatus est, &, si qua dabatur quies, subridere statim, ut solebat, & lætâ facie loqui. Semper aliquot horas quotidie lectioni aut scriptioni dederat. Scripta, quibus quid novi acciderit, enarratur, legit die Sabbathi duodevicesimo Mensis Martii anno 172$\frac{6}{7}$, & diutiùs cum Celeberrimo MEADIO, quo Medico utebatur, collocutus est, atque omnino sensuum & mentis compos erat, sed sub vesperam mente lapsus est, nec unquam sibi redditus. E vitâ decessit proximo die Lunæ, vicesimo ejusdem mensis, natus annos octoginta quinque. Compositum fuit ejus cadaver in lecto funebri ad pompam ornato in Cubiculo *Jerosolymæ Westmonasterii*, unde efferuntur Magnates, & aliquandò Reges. Latum ad sepulturam fuit in Abbatiâ *Westmonasterii*, & pallam, seu stragulum, quo feretrum obductum erat, sustinebant supremus Angliæ Cancellarius, Dux Montrosæ, Dux Roxburgi, Comes Pembrockiæ, Comes Sussexii, & Comes Maclesfieldii. Episcopus Rocheftriæ, quem omnes ejus Ecclesiæ Clerici comitaban-

[*a*] Voodward. ad calcem sui libri, cui titulus *Fossils of all Kinds digested in to a Method suitable.*

mitabantur; funereas preces recitavit. Cadaver ſepultum fuit ubi aditus eſt ad Chorum. Ejus Familia monumentum illius memoriæ poſuit, in quo inſculptum fuit hoc Epitaphium :

H. S. E.

ISAACUS NEWTONUS EQUES AURATUS:
QUI ANIMI VI PROPE DIVINA
PLANETARUM MOTUS, FIGURAS,
COMETARUM SEMITAS, OCEANIQUE ÆSTUS,
SUA MATHESI FACEM PRÆFERENTE,
PRIMUS DEMONSTRAVIT.
RADIORUM LUCIS DISSIMILITUDINES,
COLORUMQUE INDE NASCENTIUM PROPRIETATES,
QUAS NEMO ANTE SUSPICATUS ERAT,
PERVESTIGAVIT.
NATURÆ, ANTIQUITATIS, S. SCRIPTURÆ,
SEDULUS, SAGAX, FIDUS INTERPRES.
DEI O. M. MAJESTATEM PHILOSOPHIA APERUIT,
EVANGELII SIMPLICITATEM MORIBUS EXPRESSIT.
SIBI GRATULENTUR MORTALES
TALE TANTUMQUE EXTITISSE
HUMANI GENERIS DECUS.
NAT. XXV. DEC. A. D. MDCLII. OBIIT
MART. XX. MDCCXXVI.

Deinde Poëta ſummus *Alexander* POPE hoc Epitaphium in ejus honorem conſcripſit.

ISAACUS NEWTONUS
QUEM IMMORTALEM
TESTANTUR TEMPUS, NATURA, COELUM:
MORTALEM
HOC MARMOR FATETUR.

&

& id quidem latinè, ſequitur autem diſtichum anglicum, quod ſic exprimere conati ſumus.

Naturam, legéſque ſuas nox atra tegebat :
Sit NEWTONUS, *ait Deus,* & *Lux cuncta fuerunt.*

Fuit ſtaturâ mediocri, & ſubpinguis, ſaltem ſenex. Vultu fuit jucundo ſimul & venerando, præſertim, cùm, fictitiâ comâ ablatâ, veram detegeret canam denſâmque. Nunquam perſpicillis uſus eſt, & unum dentem amiſerat. Fuit illi, juxta FONTENELLIUM, acies oculorum vivida & acris, ſed juxta alios, qui NEWTONUM noverunt, & præſertim juxta Epiſcopum *Atterburyienſem*, in quâdam epiſtolâ, res longè aliter ſe habebat; ſaltem, inquit ille, viginti ab hinc annis, quo tempore, circiter, illum noſceré cœpi. Neque in vultu, neque in agendo acutam illam ſagacitatem, quæ in ejus libris deprehenditur, præſeferebat; quin potiùs languorem quemdam, qui nihil magni pollicebatur illis, qui eum ignorabant. Leniſſimus erat, & pacis ſtudioſiſſimus. Maluiſſet obſcuram agere vitam, quàm in illas lites & controverſias incidere, quibus Viri ingenio doctrinâque præſtantiſſimi ſunt obnoxii. Hinc factum eſt, ut *Lectiones Opticas*, & *Methodum Fluxionum* & *Serierum infinitarum*, quamvis jam Typis paratas, ſupprimeret, ſiquidem, ut ait ipſe (*a*), ſubortæ ſtatim per diverſorum Epiſtolas, (objectionibus, aliiſque refertas,) crebræ interpellationes me prorsùs à conſilio deterruerunt, & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quòd, umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorſus ſubſtantialem. Sed, obſervat FONTENELLIUS (*b*), hac umbrâ fraudatus non fuit, neque ut eam ſibi compararet, amiſit quietem, quam tanti faciebat, & inſuper ex hac umbrâ tantum veræ felicitatis, quantum ex quiete, accepit. Modeſtiâ fuit ſummâ, & ab ea ne latum quidem unguem diſceſſit, quamvis omnes in illam conſpirarent. Semper ita de ſe, & de aliis locutus eſt, ut ab omni vel minimâ jactantiæ ſuſpicione remotus unicuique, etiam iniquiſſimo, videretur. Simplex erat & affabilis, atque, ad cujuſque captum ſe accommodans, omnibus parem ſe præſtabat. Nunquam à vitæ communis officiis immunem redditum ingenio, aut famâ, quibus pollebat, ſe credidit. Quamquam Eccleſiæ Anglicanæ foret addictus, nunquam tamen aliter ſentientes vexaviſſet, ut illos ad eam revocaret; non quia Religionem naturalem duntaxat admitteret, nam Revelationi firmiter adhærebat, ita ut inter tot libros, quos aſſiduè verſabat, nullum ſæpiùs & attentiùs legeret, quàm Sacra Volumina. Nullam ſe beneficum præſtandi neglexit occaſionem, in quâ re ſibi indulgere poterat

[*a*] Epiſtolâ poſt. ad *Oldemb.* Tom. I. pag. 334. hujus.
[*b*] Loco ſæpè citato.

rat, quandoquidem & avitâ re opimâ, & quæstuoso munere potiebatur, quos reditus prudentissimâ dispensatione augebat. Splendidus enim erat & magnificus, quando res ferebat, ceteroquin frugi, & ab omni divitiarum ostentatione, & apparatûs atque deliciarum studio alienissimus. Hinc factum est, ut non semel in affines, seu potiùs in indigos quoscunque liberalissimus esse posset. Cùm testamento largiri donum non putaret, intestatus mortuus est, & reliquit triginta & duo millia librarum *sterlinarum*, rerum quidem mobilium. Ceterùm, uxorem nunquam duxit. Quamquam, cùm jam esset magno natu, & morti proximus, memoriâ minus firmâ uteretur, attamen libros suos intelligebat (*a*); quod, (ait PEMBERTONUS,) adversatur iis, quæ à pluribus audivi. Cujus rei ratio fortassis est, quòd aliquando minùs ad sermones de hisce rebus habendos paratus erat, quàm optabatur. Sed animadvertendum est magnos Viros animo non raró peregrè esse, non solùm quando agitur de rebus ad vitam pertinentibus, sed etiam quando res est de scientiis, quibus præcipuam operam navàrunt. Inventores non eodem, quo reliqui, pacto cogitata in mente congerere & disponere videntur. Etenim, quoties illa proferre debent, partim saltem quodammodo rursus investigare coguntur; ideò non semper sibi sunt æquales: sed illi, qui res ope firmæ memoriæ retinent, sæpè inventoribus ipsis peritiores videntur. Ab eodem discimus NEWTONUM pauciores, quàm quis crederet, ex recentioribus Mathematicis legisse; sed inveniendi facultas, quæ miranda in illo erat, facilè illi sufficiebat, quæ necessaria erant ad prosequendum argumentum, quod susceperat. Sæpiùs se reprehendebat quòd res merè geometricas algebraicis rationibus tractavisset, & quòd libro suo de Algebrâ *Arithmeticæ Universalis* titulum posuisset, meliùs asserens CARTESIUM suum de re eâdem volumen dixisse *Geometriam*, ut sic ostenderet has computationes subsidia tantùm esse Geometris ad inveniendum. Magni faciebat SLUSIUM, BARROVIUM, & HUGENIUM, qui hac corruptelâ vitiari se non sivissent. Commendare solebat laudabile incœptum *Hugonis de Omerique*, qui veterum Analysim restituere tentaverat, & summo in pretio habebat APOLLONII libros de *Sectione Rationis*, quia, cujus generis esset hæc Analysis, perspicuè demonstrant. Quamquam BARROVIUS inveniendi facultate non minùs, quin etiam fortasse magis valeat, quàm recentiorum quilibet, præter Auctorem nostrum, tamen NEWTONUS præcipuè HUGENIUM commendare solebat, quem recentiorum elegantissimum & optimum Veterum imitatorem nuncupabat. Horum institutum & demonstrandi rationem vehementer mirabatur, semet ipse reprobans, quòd non magis illis adhæsisset; lugebat errorem, in quo se incidisse dicebat, cùm, quando Mathesi cœpit incumbere, CARTESII, aliorúmque de Algebrâ Scriptorum libris sese totum tradidisset non priùs, quantâ

[*a*] *Pemberton A View of Sir Isaac Newton's Philosophy.* Prefa.

quantâ par erat diligentiâ consideratis EUCLIDIS Elementis, quæ, ut alia Veterum Geometrarum scripta tanti faciebat, (a) ut dicere soleret nihil necesse futurum de Geometriâ atque adeò universâ Mathesi scribere, si veterum commentationes ad nos pervenissent. Postquam ei creditum fuit munus argenti feriendi nihil magni, quod ad Philosophiam & Matheses attineret, aggressus est. Nam, quamvis pro magno incœpto haberi possit solutio notissimi Problematis de *Trajectoriis*, quod Anglis, tanquam ingenii lapis lydius proposuerat LEIBNITIUS cum illis contendens, & quod, utpote intricatissimum & difficillimum, elegerat, tamen ludus jocúsque fuit, NEWTONO, qui ut asseritur illud sub vespere recepit revertens ex æde, in quâ nummi conflantur, & quidem lassus, atque illud solvit, antequam cubitum abiret. Dissertationes plures de Antiquitatibus, Historiâ, Theologiâ, Chymiâ, aliisque argumentis reliquit. Refert Clarissimus COSTIUS (b), quòd cùm aliquando cum NEWTONO colloqueretur de iis, quæ habet LOCKIUS in libro suo de Mente Humanâ lib. IV. Cap. X. §. 18. quòd, scilicet, fieri posset, ut quamvis imperfectè, aliquo tamen pacto cognoscatur quomodo materies Dei virtute creata fuerit, ab illo audivit se auctorem esse hujus explicationis, quam indicat LOCKIUS; illam sibi in mentem venisse dum de hoc re verba faceret cum eodem LOCKIO, & Anglo quodam non minus ingenio & doctrinâ, quàm genere claro, & hanc esse. Aliquo pacto, aiebat, intelligere liceret quo pacto Materies creata fuerit, si supponeretur Deum suâ potentiâ vetuisse ne quid penetrare posset in certam Spatii partem, quod purum Spatium naturâ est penetrabile, æternum, necessarium, infinitum; sic enim illa Spatii pars impenetrabilitate gauderet, quæ qualitas de Materiei essentiâ est: &, quoniam purum Spatium omninò uniforme est, supponi posset Deum hoc impenetrabilitatis genus alteri Spatii parti impertivisse, & hinc quodammodo ideam mobilitatis haberemus, quæ iterum qualitas ad essentiam materiei pertinet.

(a) Auctor Versionis Gallicæ Chronol. Newt. in Præfat.
(b) Essai Philosoph. de Locke traduit par Mr. Coste Edit. sec. 1729.

INDEX OPUSCULORUM TOMI PRIMI.

OPUSCULUM I.

OPUSCULUM II.

OPUSCULUM III.

De Quadraturâ Curvarum.

OPUSCULUM IV.

OPUSCULUM V.

OPUSCULUM VI.

OPUSCULUM VII.

OPUS-

OPUSCULUM VIII.

OPUSCULUM IX.

OPUSCULUM X.

OPUSCULUM XI.

OPUSCULUM XII.

OPUSCUCUM XIII.

OPUSCULUM XIV.

OPUSCUCUM XV.

OPUSCULUM XVI.

OPUS-

OPUSCULUM I.

ISAACI NEWTONI
ANALYSIS
PER ÆQUATIONES NUMERO
TERMINORUM INFINITAS,

Edita LONDINI 1711.

DE ANALYSI

PER ÆQUATIONES NUMERO TERMINORUM INFINITAS.

Methodum generalem, quam de Curvarum quantitate per Infinitam terminorum Seriem mensuranda, olim excogitaveram, in sequentibus breviter explicatam potius quam accuratè demonstratam habes.

BASI AB (*Fig.* 1.) Curvæ alicujus AD, sit Applicata BD perpendicularis: Et vocetur $AB = x$, $BD = y$, & sint a, b, c, &c. Quantitates datæ, & m, n, Numeri Integri. Deinde, TAB. I.

Curvarum Simplicium Quadratura.

REGULA I.

Si $ax^{\frac{m}{n}} = y$; *Erit* $\frac{an}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} =$ *Areæ* ABD.

Res Exemplo patebit.

1. Si $x^2 (= 1x^{\frac{2}{1}}) = y$, hoc est, $a = 1 = n$ & $m = 2$; Erit $\frac{1}{3}x^3 =$ ABD.
2. Si $4\sqrt{x} (= 4x^{\frac{1}{2}}) = y$; Erit $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} (= \frac{8}{3}\sqrt{x^3}) =$ ABD.
3. Si $\sqrt[3]{x^5} (= x^{\frac{5}{3}}) = y$; Erit $\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} (= \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8}) =$ ABD.
4. Si $\frac{1}{x^2} (= x^{-2}) = y$, id est, si $a = 1 = n$, & $m = -2$;

Erit $(-\frac{1}{1}x^{-\frac{1}{1}} =) -x^{-1} (= \frac{-1}{x}) = \alpha$BD, infinitè versùs α protensæ (*Fig.* 2.), quam Calculus ponit negativam, propterea quod jacet ex altera parte Lineæ BD.

TAB. I.

5. Si $\frac{1}{\sqrt{x^3}} (= x^{-\frac{3}{2}}) = y$; Erit $(-\frac{2}{1}x^{-\frac{1}{2}} =) \frac{2}{-\sqrt{x}} =$ BDα.
6. Si $\frac{1}{x} (= x^{-1}) = y$; Erit $\frac{1}{0}x^{\frac{0}{1}} = \frac{1}{0}x^0 = \frac{1}{0} \times 1 = \frac{1}{0} =$ Infinitæ, qualis est Area Hyperbolæ ex utraque parte Lineæ BD.

Compositarum Curvarum Quadratura ex Simplicibus.

REGULA II.

Si valor ipsius y *ex pluribus istiusmodi Terminis componitur, Area etiam componetur ex Areis quæ à singulis Terminis emanant.*

EXEMPLA PRIMA.

Si $x^2 + x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Etenim (*Fig.* 3.) si semper sit $x^2 =$ BF, & $x^{\frac{3}{2}} =$ FD, erit, ex præcedente Regula, $\frac{1}{3}x^3 =$ superficiei AFB descriptæ per Lineam BF, & $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ AFD descriptæ per DF; Quare $\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ toti ABD.

Sic si $x^2 - x^{\frac{3}{2}} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} =$ ABD.

Et si $3x - 2x^2 + x^3 - 5x^4 = y$; Erit $\frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - x^5 =$ ABD.

EXEM-

EXEMPLA SECUNDA.

Si $x^{-2} + x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit (*Fig. 6.*) $-x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha$BD. TAB. I.

Vel si $x^{-2} - x^{-\frac{3}{2}} = y$; Erit $-x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}} = \alpha$BD.

Quarum signa si mutaveris, habebis Affirmativum valorem ($x^{-1} + 2x^{-\frac{1}{2}}$ vel, $x^{-1} - 2x^{-\frac{1}{2}}$) superficiei αBD, modò tota cadat supra basim ABα.

Sin aliqua pars cadat infra (quod fit cùm Curva decussat suam Basin inter B & α, ut hìc (*Fig.* 4.) vides in δ,) istâ parte à parte superiori subductâ, habebis valorem Differentiæ: Earum verò Summam si cupis, quære utramque Superficiem seorsim, & adde. Quod idem in reliquis hujus Regulæ exemplis notandum volo.

EXEMPLA TERTIA.

Si $x^2 + x^{-2} = y$; Erit $\frac{1}{3}x^3 - x^{-1} =$ Superficiei descriptæ. Sed hìc notandum est, quòd dictæ Superficiei partes sic inventæ jacent ex diverso latere Lineæ BD.

Nempe, (*Fig.* 5.) posito $x^2 =$ BF, & $x^{-2} =$ FD; Erit $\frac{1}{3}x^3$ = ABF Superficiei per BF descriptæ, & $-x^{-1} =$ DFα Superficiei descriptæ per DF.

Et hoc semper accidit cum Indices $\left(\frac{m+n}{n}\right)$ rationum Basis x in valore Superficiei quæsitæ, sint variis signis affecti. In hujusmodi Casibus, pars aliqua BD$\delta\beta$ Superficiei media (quæ sola dari poterit, cum Superficies sit utrinque infinita) sic invenitur.

Subtrahe Superficiem ad minorem Basin Aβ pertinentem, à Superficie ad majorem Basin AB pertinente, & habebis βBDδ Superficiem differentiæ Basium insistentem. Sic in hoc Exemplo. (*Vide Fig. præcedentem.*)

Si AB $= 2$, & A$\beta = 1$; Erit βBD$\delta = \frac{17}{6}$:

Etenim Superficies ad AB pertinens (ABF — DFα), erit $\frac{8}{3} - \frac{1}{2}$ sive $\frac{13}{6}$; & superficies ad Aβ pertinens (A$\phi\beta$ — $\delta\phi\alpha$)

erit $\frac{1}{3} - 1$, five $-\frac{2}{3}$: & earum differentia (ABF — DF — $A\Phi\beta + \delta\Phi\alpha = \beta BD\delta$) erit $\frac{13}{6} + \frac{2}{3}$ five $\frac{17}{6}$.

Eodem modo, fi $A\beta = 1$, $AB = x$; Erit $\beta BD\delta = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x^3 - x^{-1}$.

Sic fi $2x^3 - 3x^5 - \frac{2}{3}x^{-4} + x^{-\frac{3}{5}} = y$, & $A\beta = 1$;

Erit $\beta BD\delta = \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{9}x^{-3} + \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} - \frac{49}{18}$.

Denique notari poterit, quod fi quantitas x^{-1} in valore ipfius y reperiatur, ifte Terminus (cum Hyperbolicam fuperficiem generat) feorfim à reliquis confiderandus eft.

TAB. I. Ut fi (*Fig.6.*) $x^2 + x^{-3} + x^{-1} = y$; Sit $x^{-1} = BF$, & $x^2 + x^{-3} = FD$, ac $A\beta = 1$; Et erit $\delta\Phi FD = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^{-2}$, utpote quæ ex Terminis $x^2 + x^{-3}$ generatur.

Quare, fi reliqua Superficies $\beta\Phi FB$, quæ Hyperbolica eft, ex Calculo aliquo fit data, dabitur tota $\beta BD\delta$.

Aliarum omnium Quadratura.

REGULA III.

Sin valor ipfius y, *vel aliquis ejus Terminus fit præcedentibus magis compofitus, in Terminos Simpliciores reducendus eft; operando in Literis ad eundem modum quo Arithmetici in Numeris Decimalibus dividunt, Radices extrahunt, vel affectas Æquationes folvunt; & ex iftis Terminis quæfitam Curvæ Superficiem, per præcedentes Regulas deinceps elicies.*

Exempla Dividendo.

TAB. II. Sit $\frac{aa}{b+x} = y$; Curvâ nempe exiftente Hyperbolâ (*Vid. Fig.* 11.)

Jam

Jam ut Æquatio ista à Denominatore suo liberetur, Divisionem sic instituo.

$$b+x)\,aa+o\left(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{b^2}+\frac{aax^2}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}\right.\ \&c.$$

$$\begin{array}{l}
aa+\frac{aax}{b} \\
\hline
o-\frac{aax}{b}+o \\
-\frac{aax}{b}-\frac{aax^2}{b^2} \\
\hline
o+\frac{aax^2}{b^2}+o \\
+\frac{aax^2}{b^2}+\frac{aax^3}{b^3} \\
\hline
o-\frac{aax^3}{b^3}+o \\
-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4} \\
\hline
o+\frac{aax^4}{b^4} \\
\&c.
\end{array}$$

Et sic vice hujus $y=\frac{aa}{b+x}$, nova prodit $y=\frac{a^2}{b}-\frac{a^2x}{b^2}+\frac{a^2x^2}{b^3}-\frac{a^2x^3}{b^4}$, &c. serie istac infinitè continuatâ; Adeoque (per Regulam Secundam) Area quæsita ABDC æqualis erit ipsi $\frac{a^2x}{b}-\frac{a^2x^2}{2b^2}+\frac{a^2x^3}{3b^3}-\frac{a^2x^4}{4b^4}$ &c. infinitæ etiam seriei, cujus tamen Termini pauci initiales sunt in usum quemvis satis exacti, si modo x sit aliquoties minor quam b.

Eodem modo, si sit $\frac{1}{1+xx}=y$, Dividendo prodibit $y=1-x^2+x^4-x^6+x^8$ &c. Unde (per Regulam Secundam) erit $ABDC=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{1}{9}x^9$ &c.

Vel

Vel si Terminus xx ponatur in divisore primus, hoc modo $(xx+1)$, prodibit $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8}$ &c. pro valore ipsius y; Unde (per Regulam Secundam) erit $BD\alpha = -x^{-1} + \frac{1}{3}x^{-3} - \frac{1}{5}x^{-5} + \frac{1}{7}x^{-7}$ &c. Priori modo procede cum x est satis parva, posteriori cum satis magna supponitur.

Denique si $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = y$; Dividendo prodit $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13x^2 + 34x^{\frac{5}{2}}$ &c. unde erit $ABDC = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^2 + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3$ &c.

Exempla Radicem extrahendo.

Si sit $\sqrt{aa+xx} = y$, Radicem sic extraho,

$$
\begin{array}{l}
aa + xx \left(a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \text{ \&c.} \right. \\
\underline{aa} \\
0 + xx \\
\quad \underline{xx + \frac{x^4}{4a^2}} \\
\quad 0 - \frac{x^4}{4a^2} \\
\qquad \underline{- \frac{x^4}{4a^2} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}} \\
\qquad 0 + \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6} \\
\qquad\quad \underline{+ \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}} \\
\qquad\quad 0 - \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \\
\qquad\qquad \text{\&c.}
\end{array}
$$

Unde, pro æquatione $\sqrt{aa+xx} = y$, nova producitur, $y = a + \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$ &c. Et (per Reg. 2.) Area quæsita (*Fig*.7.) $ABDC$ erit $= ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$ &c. Et hæc est Quadratura Hyperbolæ.

TAB. I.

Eodem

Eodem modo, si sit $\sqrt{aa - xx} = y$, ejus Radix erit $a - \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c. Adeóque (*Fig.* 12.) Area TAB. II. quæsita ABDC erit æqualis $ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1152a^7}$, &c. Et hæc est Quadratura Circuli.

Vel, si ponas $\sqrt{x - xx} = y$, erit Radix æqualis infinitæ seriei. $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et (*Fig.* 1.) TAB. I. Area quæsita ABD æqualis erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$, &c., sive $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{28}x^3 - \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$, &c. Et hæc est Areæ Circuli Quadratura.

Si $\frac{\sqrt{1 + ax^2}}{\sqrt{1 - bx^2}} = y$, (Cujus Quadratura dat Longitudinem curvæ ellipticæ;) Extrahendo Radicem utramque prodit

$$\frac{1 + \frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{8}a^2x^4 + \frac{1}{16}a^3x^6 - \frac{5}{128}a^4x^8}{1 - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{8}b^2x^4 - \frac{1}{16}b^3x^6 - \frac{5}{128}b^4x^8}, \text{ \&c.}$$

Et dividendo, sicut fit in Fractionibus Decimalibus, habes

$$\begin{array}{lllll} 1 + \frac{1}{2}bx^2 & + \frac{3}{8}b^2x^4 & + \frac{5}{16}b^3x^6 & + \frac{35}{128}b^4x^8, \text{ \&c.} \\ + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}ab^2 & + \frac{5}{32}ab^3 \\ & - \frac{1}{8}a^2 & - \frac{1}{16}a^2b & - \frac{3}{64}a^2b^2 \\ & & + \frac{1}{16}a^3 & + \frac{1}{32}a^3b \\ & & & - \frac{5}{128}a^4 \end{array}$$

Adeóque Aream quæsitam

$$\begin{array}{lll} x + \frac{1}{6}bx^3 & + \frac{3}{40}b^2x^5, \text{ \&c.} \\ + \frac{1}{6}a & + \frac{1}{20}ab \\ & - \frac{1}{40}a^2 \end{array}$$

 Sed

Sed obſervandum eſt, quòd Operatio non rarò abbreviatur per debitam Æquationis præparationem, ut in allato Exemplo $\frac{\sqrt{1+ax^2}}{\sqrt{1-bx^2}}=y$ Si utramque partem Fractionis per $\sqrt{1-bxx}$ multiplices prodibit $\frac{\sqrt{1+ax^2-abx^4}}{1-bx^2}=y$, & reliquum opus perficitur extrahendo Radicem Numeratoris tantùm, & dividendo per Denominatorem.

Ex hiſce, credo, ſatis patebit modus reducendi quemlibet valorem ipſius y (quibuſcumque Radicibus vel Denominatoribus ſit perplexus, ut hìc videre eſt;

$$x^3+\frac{\sqrt{x-\sqrt{1-xx}}}{\sqrt[3]{axx^2+x^3}}-\frac{\sqrt[5]{x^3+2x^5-x^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x+x^2-\sqrt{2x-x^{\frac{2}{3}}}}}=y)$$ in ſeries infinitas ſimplicium Terminorum, ex quibus, per Regulam Secundam, quæſita Superficies cognoſcetur.

Exempla per Reſolutionem Æquationum.

NUMERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

Quia tota difficultas in Reſolutione latet; modum quo ego utor in Æquatione Numerali primùm illuſtrabo.

Sit $y^3-2y-5=0$, reſolvenda: Et ſit 2, numerus qui minus quam decimâ ſui parte differt à Radice quæſitâ. Tum pono $2+p=y$, & ſubſtituo hunc ipſi valorem in Æquationem, & inde nova prodit $p^3+6p^2+10p-1=0$, cujus Radix p exquirenda eſt, ut Quotienti addatur: Nempe (neglectis p^3+6p^2 ob parvitatem) $10p-1=0$, ſive $p=0,1$, prope veritatem eſt; itaque ſcribo 0, 1 in Quotiente, & ſuppono $0,1+q=p$, & hunc ejus valorem, ut prius ſubſtituo, unde prodit $q^3+6,3q^2+11,23q+0,061=0$.

Et cùm $11,23q+0,061=0$ veritati prope accedat, ſive fere ſit q æqualis $-0,0054$ (dividendo nempe donec tot eliciantur Figuræ quot locis primæ Figuræ hujus & principalis Quotientis excluſive diſtant) ſcribo $-0,0054$ in inferiori parte Quotientis, cùm negativa ſit.

Et ſupponens $-0,0054+r=q$, hunc ut prius ſubſtituo, & operationem ſic produco quo uſque placuerit. Verùm ſi ad bis tot

Fig. 1.

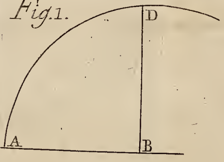


Fig. 2.

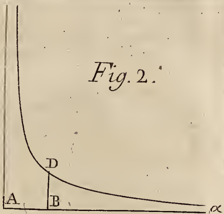


Fig. 3.

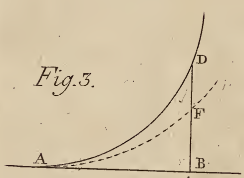


Fig. 4.

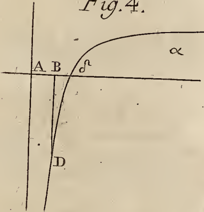


Fig. 5.

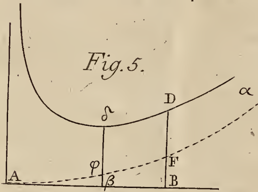


Fig. 6.

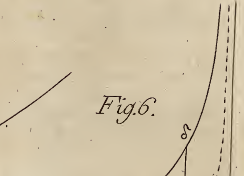
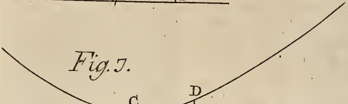


Fig. 7.



figuras tantùm quot in Quotiente jam reperiuntur unâ demptâ, operam continuare cupiam, pro q ſubſtituo $-0,0054+r$ in hanc $6,3q^2 +11,23q+0,061$, ſcilicet primo ejus Termino (q^3) propter exilitatem.

$y^3-2y-5=0$		$+2,10000000$ $-0,00544853$ $+2,09455147=y$
$2+p=y$	$+y^3$ $-2y$ -5	$+8+12p+6p^2+p^3$ $-4-2p$ -5
	Summa	$-1+10p+6p^2+p^3$
$0,1+q=p$	$+p^3$ $+6p^2$ $+10p$ -1	$+0,001+0,03q+0,3q^2+q^3$ $+0,06+1,2+6,0$ $+1,+10,$ $-1,$
	Summa	$+0,061+11,23q+6,3q^2+q^3$
$-0,0054+r=q$	$+6,3q^2$ $+11,23q$ $+0,061$	$+0,000183708-0,06804r+6,3r^2$ $-0,060642+11,23$ $+0,061$
	Summa	$+0,000541708+11,16196r+6,3r^2$
$-0,00004853+s=r$		

ſuam neglecto, & prodit $6,3r^2+11,16196r+0,000541708=0$ fere, ſive (rejecto $6,3r^2$) $r=\frac{-0,000541708}{11,16196}=-0,00004853$ fere, quam ſcribo in negativa parte Quotientis. Denique negativam partem Quotientis ab Affirmativa ſubducens habeo 2,09455147 Quotientem quæſitam.

Æquationes plurium dimenſionum nihilo ſecius reſolvuntur, & operam ſub fine, ut hìc factum fuit, levabis, ſi primos ejus Terminos gradatim omiſeris.

Præterea notandum eſt quòd in hoc exemplo, ſi dubitarem an $0,1=p$ veritati ſatis accederet, pro $10p-1=0$, finxiſſem $6p^2+10p-1=0$, & ejus Radicis primam Figuram in Quotiente ſcripſiſſem; & ſecundam vel tertiam Quotientis Figuram ſic explorare convenit, ubi in Æquatione iſta ultimò reſultante quadratum coefficientis penultimi Termini, non ſit decies majus quam factus ex ultimo Termino ducto in coefficientem Termini antepenultimi.

Imo laborem plerumque minues, præſertim in Æquationibus plurimarum dimenſionum, ſi Figuras omnes Quotienti addendas dicto modo (hoc eſt extrahendo minorem Radicum, ex tribus ultimis Terminis Æquationis noviſſime reſultantis) exquiras: Iſto enim modo Figuras duplo plures qualibet vice Quotienti lucraberis.

Hæc Methodus reſolvendi Æquationes pervulgata an ſit neſcio, certe mihi videtur præ reliquis ſimplex, & uſui accommodata. Demonſtratio ejus ex ipſo modo operandi patet, unde cùm opus ſit, in memoriam facile revocatur.

Æquationes in quibus vel aliqui vel nulli Termini deſint, eadem fere facilitate tractantur; & Æquatio ſemper relinquitur, cujus Radix unà cum acquiſita Quotiente adæquat Radicem Æquationis primo propoſitæ. Unde Examinatio Operis hìc æque poterit inſtitui ac in reliqua Arithmetica, auferendo nempe Quotientem à Radice primæ Æquationis (ſicut Analyſtis notum eſt) ut Æquatio ultima vel Termini ejus duo treſve ultimi producantur inde. Quicquid laboris hìc eſt, iſtud in Operatione ſubſtituendi quantitates unas pro aliis reperietur: Id quod varie perficias, at ſequentem modum maxime expeditum puto, præſertim ubi Numeri coefficientes conſtant ex pluribus Figuris.

Sit $p+3$ ſubſtituenda pro y in hanc $y^4-4y^3+5y^2-12y+17=0$. Et cùm iſta poſſit reſolvi in hanc formam $\overline{\overline{\overline{y-4}\times y+5}\times y-12}\times y+17=0$. Æquatio nova ſic generabitur $\overline{p-1}\times\overline{p+3}=p^2+2p-3$. & p^2+2p+2 in $p+3=p^3+5p^2+8p+6$. & p^3+5p^2+8p-6 in $p+3=p^4+8p^3+23p^2+18p-18$. & $p^4+8p^3+23p^2+18p-1=0$, quæ quærebatur.

LITERALIS ÆQUATIONUM AFFECTARUM RESOLUTIO.

His in numeris ſic oſtenſis: Sit Æquatio literalis $y^3+a^2y-2a^3+axy-x^3=0$, reſolvenda.

Primùm

Primùm inquiro valorem ipſius y cum x ſit nulla, hoc eſt, elicio Radicem hujus Æquationis $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, & invenio eſſe $+a$. Itaque ſcribo $+a$ in Quotiente, & ſupponens $+a+p=y$, ſubſtituo pro y valorem ejus, & Terminos inde reſultantes ($p^3 + 3ap^2 + 4a^2p$, *&c.*) margini appono; Ex quibus aſſumo $+4a^2p + a^2x$ Terminos utique ubi p & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & eos nihilo fere æquales eſſe ſuppono, ſive $p = -\frac{1}{4}x$ fere, vel $p = -\frac{1}{4}x + q$. Et ſcribens $-\frac{1}{4}x$ in Quotiente, ſubſtituo $-\frac{1}{4}x+q$ pro p; Et Terminos inde reſultantes iterum in margine ſcribo, ut vides in annexo ſchemate, & inde aſſumo Quantitates $+4a^2q - \frac{1}{16}ax^2$, in quibus utique q & x ſeorſim ſunt minimarum dimenſionum, & fingo $q = \frac{xx}{64a}$ fere, ſive $q = +\frac{xx}{64a} + r$; & adnectens $+\frac{xx}{64a}$ Quotienti, ſubſtituo $\frac{xx}{64a} + r$ pro q; & ſic procedo quo uſque placuerit.

$$y^3 + a^2y - 2a^3 + axy - x^3 = 0$$

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3}, \text{ \&c.}$$

$+a+p=y$	$+y^3$ $+a^2y$ $+axy$ $-2a^3$ $-x^3$	$+a^3+3a^2p+3ap^2+p^3$ $+a^3+a^2p$ $+a^2x+axp$ $-2a^3$ $-x^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$ $+3ap^2$ $+4a^2p$ $+axp$ $+a^2x$ $-x^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}x^2q-\frac{3}{4}xq^2+q^3$ $+\frac{3}{16}ax^2-\frac{3}{2}axq+3aq^2$ $-a^2x+4a^2q$ $-\frac{1}{4}ax^2+axq$ $+a^2x$ $-x^3$
$+\frac{x^2}{64a}+r=q$	$+3aq^2$ $+4a^2q$ $-\frac{1}{2}axq$ $+\frac{3}{16}x^2q$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$	$+\frac{3x^4}{4096a}+\frac{3}{32}x^2r+3ar^2$ $+\frac{1}{16}ax^2+4a^2r$ $-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$ $+\frac{3x^4}{1024a}+\frac{3}{16}x^2r$ $-\frac{1}{16}ax^2$ $-\frac{65}{64}x^3$

$$+4a^2-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}x^2)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}\left(+\frac{131x^3}{512a^2}+\frac{509x^4}{16384a^3}\right.$$

Sin duplo tantùm plures Quotienti Terminos, uno dempto, jungendos adhuc vellem: Primo Termino (q^3) Æquationis noviſſime reſultantis miſſo, & iſtâ etiam parte ($-\frac{3}{4}q^2$) ſecundi, ubi x eſt tot dimenſionum quot in penultimo Quotientis; In reliquos Terminos ($3aq^2 + 4a^2q$, *&c.*) margini adſcriptos ut vides, ſubſtituo $\frac{x^2}{64a} + r$ pro q; & ex ultimis duobus Terminis ($\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131}{128}x^3$

+

$+\frac{9}{32}x^2r - \frac{1}{2}axr + 4a^2r$) Æquationis inde reſultantis, facta diviſione, $4a^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{9}{32}x^2$) $+ \frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}$ elicio ($+ \frac{131x^3}{512a^2}$ $+ \frac{509x^4}{16384a^3}$; Quotienti adnectendos.

Denique Quotiens iſta ($a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a}$, &c.) per Regulam ſecundam, dabit $ax - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048a^2} + \frac{509x^5}{81920a^3}$, &c. pro Area quæſita, quæ ad veritatem tanto magis accedit, quanto x ſit minor.

Alius modus eaſdem Reſolvendi.

Sin valor Areæ tanto magis ad veritatem accedere debet quanto x ſit major; Exemplum eſto $y^3 + axy + x^2y - a^3 - 2x^3 = 0$. Itaque hanc reſoluturus excerpo Terminos $y^3 + x^2y - 2x^3$ in quibus x & y vel ſeorſim, vel ſimul multiplicatæ, ſunt & plurimarum, &, æqualium ubique dimenſionum; & ex iis quaſi nihilo æqualibus Radicem elicio. Hanc invenio eſſe x, & in Quotiente ſcribo. Vel, quod eodem recidit, ex $y^3 + y - 2$ (unitate pro x ſubſtituta) Radicem extraho, quæ hìc prodit 1; & eam per x multiplico, & factum (x) in Quotiente ſcribo. Denique pono $x + p = y$, & ſic procedo ut in priori Exemplo, donec habeam Quotientem $x - \frac{a}{4} + \frac{aa}{64x} + \frac{131a^3}{512x^2} + \frac{509a^4}{16384x^3}$, &c. Adeóque Aream $\frac{x^2}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}} - \frac{131a^3}{512x} - \frac{509a^4}{32768x^2}$, de qua vide exempla tertia Regulæ ſecundæ. Lucis gratia dedi hoc exemplum in omnibus idem cum priori, modò x & a ſibi invicem ibi ſubſtituantur, ut non opus eſſet aliud Reſolutionis exemplum hìc adjungere.

Area autem ($\frac{xx}{2} - \frac{ax}{4} + \boxed{\frac{aa}{64x}}$, &c.) terminatur ad Curvam quæ juxta Aſymptoton aliquam in infinitum ſerpit; & Termini initiales ($x - \frac{1}{4}a$) valoris extracti de y, in Aſymptoton iſtam ſemper terminantur; unde portionem Aſymptoti facilè invenies. Idem ſemper notan-

notandum eſt cùm Area deſignatur Terminis plùs plúſque diviſis per x continuè, præterquamquod vice Aſymptoti rectæ quandoque habeatur Parabola conica, vel alia magis compoſita.

Sed hunc modum miſſum faciens, utpote particularem, quia non applicabilem Curvis in orbem ad inſtar Ellipſium flexis; de altero modo per exemplum $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſupra oſtenſo (ſcilicet quo dimenſiones ipſius x in Numeratoribus Quotientis perpetuo augeantur) annotabo ſequentia.

1. Si quando accidit quòd valor ipſius y, cum x nullum eſſe fingitur, ſit quantitas ſurda vel penitus ignota, licebit illam litera aliqua deſignare. Ut in exemplo, $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, ſi Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3$ fuiſſet ſurda vel ignota, finxiſſem quamlibet (b) pro ea ponendam; & Reſolutionem ut ſequitur perfeciſſem. Scribens b in Quotiente, ſuppono $b + p = y$, & iſtum pro y ſubſtituo, ut vides; unde nova $p^3 + 3bp^2$, &c. reſultat, rejectis Terminis $b^3 + a^2b - 2a^3$, qui nihilo ſunt æquales, propterea quod b ſupponitur Radix hujus $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Deinde Termini $3b^2p + a^2p + abx$ dant $-\frac{abx}{3b^2 + a^2}$ Quotienti apponendum, & $-\frac{abx}{3b^2 + a^2} + q$ ſubſtituendum pro p, &c.

$y^3 + aay$

$$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0. \text{ Sit } cc = 3b^2 + a^2.$$

$$y = b - \frac{abx}{c^2} + \frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{6a^5b^3x^3}{c^{10}}, \&c.$$

$b + p = y$	$+ y^3$	$+ b^3 + 3b^2p + 3bp^2 + p^3$
	$+ axy$	$+ abx + axp$
	$+ aay$	$+ aab + aap$
	$- x^3$	$- x^3$
	$- 2a^3$	$- 2a^3$
$-\frac{abx}{cc} + q = p$	$+ p^3$	$- \frac{a^3b^3x^3}{c^6}$, &c.
	$+ 3bp^2$	$+ \frac{3a^2b^3x^2}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2}q$, &c.
	$+ axp$	$- \frac{a^2bx^2}{c^2} + axq$
	$+ ccp$	$- abx + ccq$
	$- x^3$	$- x^3$
	$+ abx$	$+ abx$

$$c^2 + ax - \frac{6ab^2x}{cc}\Big) \frac{a^4bx^2}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} \Big(\frac{a^4bx^2}{c^6} + \frac{x^3}{c^2} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8}, \&c.$$

Completo opere, fumo numerum aliquem pro a, & hanc $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$, ficut de numerali Æquatione oftenfum fuprà, refolvo; & Radicem ejus pro b fubftituo.

2. Si dictus valor fit nihil, hoc eft, fi in Æquatione refolvendâ nullus fit Terminus, nifi qui per x vel y fit multiplicatus, ut in hâc $y^3 - axy + x^3 = 0$; tum Terminos ($- axy + x^3$) feligo, in quibus x feorfim & y etiam feorfim, fi fieri poteft, aliàs per x multiplicata, fit minimarum dimenfionum. Et illi dant $+ \frac{xx}{a}$ pro primo Termino Quotientis, & $\frac{xx}{a} + p$ pro y fubftituendum. In hac $y^3 - a^2y + axy - x^3 = 0$, licebit primum Terminum Quotientis vel ex $- a^2y - x^3$, vel ex $y^3 - a^2y$ elicere.

3. Si valor ifte fit imaginarius, ut in hac $y^4 + y^2 - 2y + 6 - x^2y^2 - 2x + x^2 + x^4 = 0$, augeo vel imminuo quantitatem x donec dictus valor evadat realis.

TAB. II. Sic in annexo *schemate* (*Fig.* 8.), cum AC (x) nulla est, tum CD (y) est imaginaria.

Sin minuatur AC per datam AB, ut BC fiat x; tum posito quòd BC (x) sit nulla; CD (y) erit valore quadruplici (CE, CF, CG, vel CH) realis; quarum Radicum (CE, CF, CG, vel CH) quælibet potest esse primus Terminus Quotientis, prout superficies BEDC, BFDC, BGDC, vel BHDC desideratur. In aliis etiam casibus, si quando hæsitas, te hoc modo extricabis.

Denique, si index potestatis ipsius x vel y sit fractio, reduco ipsum ad integrum: ut in hoc exemplo $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$. Posito $y^{\frac{1}{2}} = v$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, resultabit $v^6 - z^3 v + z^4 = 0$, cujus Radix est $v = z + z^3$, &c. sive (restituendo valores) $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x$, &c. & quadrando $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}}$, &c.

Et hæc de areis Curvarum investigandis dicta sufficiant. Imo, cùm Problemata omnia de Curvarum Longitudine, de quantitate & superficie Solidorum, déque Centro Gravitatis, possunt eò tandem reduci, ut quæratur quantitas Superficiei planæ lineâ curvâ terminatæ, non opus est quicquam de iis adjungere. In istis autem quo ego operor modo, dicam brevissime.

Applicatio prædictorum ad reliqua istiusmodi Problemata.

TAB. II. Sit (*Fig.* 9.) ABD Curva quævis, & AHKB rectangulum, cujus latus AH vel BK est unitas. Et cogita rectam DBK uniformiter ab AH motam, areas ABD & AK describere; & quòd BK (1) sit momentum, quo AK (x), & BD (y) momentum, quo ABD gradatim augetur; & quòd ex momento BD perpetim dato, possis, per prædictas regulas, aream ABD ipso descriptam investigare, sive cum areâ AK (x) momento 1 descriptâ conferre.

Jam, quâ ratione Superficies ABD ex momento suo perpetim dato, per præcedentes regulas elicitur, eâdem quælibet alia quantitas ex momento suo sic dato elicietur. Exemplo res fiet clarior.

Longi-

Longitudines Curvarum invenire.

Sit (*Fig.* 10.) ADLE Circulus, cujus Arcus AD longitudo eſt indaganda. Ductâ tangente DHT, & completo indefinite parvo rectangulo HGBK, & poſito AE = 1 = 2AC. Erit, ut BK, ſive GH, momentum Baſis AB (x), ad HD momentum Arcûs AD :: BT : DT :: BD ($\sqrt{x - xx}$): DC ($\frac{1}{2}$) :: 1 (BK) : $\frac{1}{2\sqrt{x - xx}}$ (DH). Adeóque $\frac{1}{2\sqrt{x - xx}}$ ſive $\frac{\sqrt{x - xx}}{2x - 2xx}$ eſt momentum Arcûs AD. Quod reductum fit $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{16}x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{32}x^{\frac{5}{2}} + \frac{35}{256}x^{\frac{7}{2}} + \frac{63}{512}x^{\frac{9}{2}}$, &c. Quare, per regulam ſecundam, longitudo Arcûs AD eſt $x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}} + \frac{35}{1152}x^{\frac{9}{2}} + \frac{63}{2816}x^{\frac{11}{2}}$, &c. ſive $x^{\frac{1}{2}}$ in $1 + \frac{1}{6}x + \frac{3}{40}x^2 + \frac{5}{112}x^3 + \frac{35}{1152}x^4 + \frac{63}{2816}x^5$, &c.

TAB. II.

Non ſecus ponendo CB eſſe x, & Radium CA eſſe 1, invenies Arcum LD eſſe $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c.

Sed notandum eſt, quòd unitas iſta, quæ pro momento ponitur, eſt Superficies cum de Solidis, & Linea cum de Superficiebus, & Punctum cum de Lineis (ut in hoc exemplo) agitur.

Nec vereor loqui de unitate in Punctis, ſive Lineis infinite parvis, ſiquidem proportiones ibi jam contemplantur Geometræ, dum utuntur methodis Indiviſibilium.

Ex his fiat conjectura de Superficiebus & quantitatibus Solidorum, ac de Centris Gravitatum.

Invenire prædictorum conversum.

Verùm si è contra ex areâ vel longitudine &c. Curvæ alicujus data longitudo Basis AB desideratur, ex Æquationibus per præcedentes regulas inventis extrahatur Radix de x.

Inventio Basis ex Area data.

TAB. II. Ut si (*Fig.* 11.) ex areâ ABDC Hyperbolæ ($\frac{1}{1+x} = y$) datâ, cupiam basim AB investigare, areâ istâ z nominatâ, extraho Radicem hujus z (ABCD) $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$, &c. neglectis illis Terminis, in quibus x est plurium dimensionum quàm z in Quotiente desideratur.

Ut, si vellem quòd z ad quinque tantùm dimensiones in Quotiente ascendat, negligo omnes $-\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8$, &c. & Radicem hujus tantùm $\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - z = 0$ extraho.

$x =$ z.

$x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c.		
$z + p = x$	$+\frac{1}{5}x^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}x^4$	$-\frac{1}{4}z^4 - z^3p$, &c.
	$+\frac{1}{3}x^3$	$+\frac{1}{3}z^3 + z^2p + zp^2$, &c.
	$-\frac{1}{2}x^2$	$-\frac{1}{2}z^2 - zp - \frac{1}{2}p^2$
	$+x$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}z^2 + q = p$	$+zp^2$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}p^2$	$-\frac{1}{8}z^4 - \frac{1}{2}z^2q$, &c.
	$-z^3p$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+z^2p$	$+\frac{1}{2}z^4 + z^2q$
	$-zp$	$-\frac{1}{2}z^3 - zq$
	$+p$	$+\frac{1}{2}z^2 + q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}z^2$	$-\frac{1}{2}z^2$
$1 - z + \frac{1}{2}z^2)\frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{8}z^4 + \frac{1}{20}z^5(\frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$		

Analyſin, ut vides, exhibui propter adnotanda duo ſequentia:

 1. Quod

1. Quòd inter subſtituendum, iſtos Terminos ſemper omitto, quos nulli deinceps uſui fore prævideam. Cujus rei regula eſto, quòd poſt primum Terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem, non addo plures Terminos dextrorſum, quam iſtius primi Termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ unitatibus diſtat. Ut in hoc exemplo, ubi maxima dimenſio eſt 5, omiſi omnes Terminos poſt z^5, poſt z^4 poſui unicum, & duos tantùm poſt z^3. Cùm Radix extrahenda (x) ſit parium ubique, vel imparium dimenſionum, hæc eſto regula; Quòd poſt primum Terminum ex qualibet quantitate ſibi collaterali reſultantem, non addo plures Terminos dextrorſum, quam iſtius primi Termini index dimenſionis ab indice dimenſionis maximæ binis unitatibus diſtat; vel ternis unitatibus, ſi indices dimenſionum ipſius x unitatibus ubique ternis à ſe invicem diſtant, & ſic de reliquis.

2. Cùm video p, q, vel r, &c. in Æquatione noviſſime reſultante eſſe unius tantùm dimenſionis, ejus valorem, hoc eſt, reliquos Terminos Quotienti addendos, per diviſionem quæro. Ut hìc vides factum.

Inventio Baſis ex data Longitudine Curvæ.

TAB. II. Si (*Fig.* 12.) ex dato arcu αD Sinus AB deſideratur; Æquationis $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. ſupra inventæ, (poſito nempe AB $= x$, αD $= z$, & A$\alpha = 1$,) Radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Et præterea, ſi Coſinum Aβ ex iſto arcu dato cupis, fac Aβ $(= \sqrt{1 - xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6 + \frac{1}{40320}z^8 - \frac{1}{3628800}z^{10}$, &c.

De Serie progreſſionum continuanda.

Hìc obiter notetur, quòd 5 vel 6 Terminis iſtarum Radicum cognitis, eas plerumque ex analogia obſervata poteris ad arbitrium producere. Sic

Sic hanc $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. produces dividendo ultimum Terminum per hos ordine numeros 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.

Et hanc $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7$, &c. per hos 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, 10×11, &c.

Et hanc $x = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{24}z^4 - \frac{1}{720}z^6$, &c. per hos 1×2, 3×4, 5×6, 7×8, 9×10, &c.

Et hanc $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7$, &c. multiplicando per hos $\frac{1\times1}{2\times3}$, $\frac{3\times3}{4\times5}$, $\frac{5\times5}{6\times7}$, $\frac{7\times7}{8\times9}$, &c. Et sic in reliquis.

Applicatio prædictorum ad Curvas mechanicas.

Et hæc de curvis geometricis dicta sufficiant. Quinetiam Curva etiamsi mechanica sit, methodum tamen nostram nequaquam respuit.

Exemplo sit (*Fig.* 13.) Trochoides ADFG, cujus vertex, A, & axis AH, & AKH rota, quâ describitur. Et quæratur Superficies ABD. Jam posito $AB = x$, $BD = y$, ut supra, & $AH = 1$; primo quæro Longitudinem ipsius BD. Nempe ex natura Trochoidis est $KD =$ arcui AK. Quare tota $BD = BK +$ arc. AK. Sed est $BK \left(= \sqrt{x - xx}\right) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c. & (ex prædictis) arcus $AK = x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{40}x^{\frac{5}{2}} + \frac{5}{112}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Ergo tota $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56}x^{\frac{7}{2}}$, &c. Et (per Reg. 2.) area $ABD = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252}x^{\frac{9}{2}}$, &c.

TAB. III.

Vel breviùs sic: Cùm recta AK tangenti TD parallela sit, erit AB ad BK sicut momentum lineæ AB ad momentum lineæ BD, hoc est $x : \sqrt{x - xx}$

$\sqrt{x - xx} :: 1 : \frac{1}{x} \sqrt{x - xx} = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{16} x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{128} x^{\frac{7}{2}}$, &c. Quare (per Reg. 2.) $BD = 2x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{20} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{56} x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{576} x^{\frac{9}{2}}$, &c. Et Superficies $ABD = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{70} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{252} x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{3168} x^{\frac{11}{2}}$, &c.

Non dissimili modo (posito C centro Circuli, & $CB = x$.) obtinebis aream CBDF, &c.

Sit (*Fig.* 14.) area ABDV Quadratricis VDE (cujus vertex est V, & A centrum circuli interioris VK cui aptatur) invenienda. Ductâ qualibet AKD, demitto perpendiculares DB, DC, KG. Eritque KG: AG :: AB (x): BD (y), sive $\frac{x \times AG}{KG} = y$. Verùm ex naturâ Quadratricis est BA (= DC) = arcui VK, sive $VK = x$. Quare posito $AV = 1$, erit $GK = x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5$, &c., ex supra ostensis, & $GA = 1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6$, &c.

$$\text{Adeòque } y \left(= \frac{x \times AG}{KG}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 - \frac{1}{720} x^6}{1 - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{120} x^4 - \frac{1}{5040} x^6}, \text{ \&c.}$$

sive, divisione factâ, $y = 1 - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{45} x^4 - \frac{2}{945} x^6$, &c. & (per Reg. 2.) area $AVDB = x - \frac{1}{9} x^3 - \frac{1}{225} x^5 - \frac{2}{6615} x^7$, &c.

Sic longitudo Quadratricis VD, licet calculo difficiliori, determinabilis est.

Nec quicquam hujusmodi scio, ad quod hæc methodus, idque variis modis, sese non extendit. Imo tangentes ad curvas mechanicas (si quando id non aliàs fiat) hujus ope ducantur. Et quicquid vulgaris Analysis per Æquationes ex finito Terminorum numero constantes

tantes, (quando id fit poffibile,) perficit; hæc per Æquationes infinitas femper perficiat: Ut nil dubitaverim nomen Analyfis etiam huic tribuere. Ratiocinia nempe in hac non minus certa funt quàm in illà, nec Æquationes minus exactæ; licèt omnes earum Terminos, nos homines & rationis finitæ nec defignare neque ita concipere poffimus, ut quantitates inde defideratas exacte cognofcamus: Sicut Radices furdæ finitarum Æquationum nec numeris nec quavis arte analyticâ ita poffunt exhiberi ut alicujus quantitas à reliquis diftincta exacte cognofcatur.

Denique ad Analyticam meritò pertinere cenfeatur cujus beneficio Curvarum areæ & longitudines &c. (id modò fiat) exactè & geometricè determinentur. Sed ifta narrandi non eft locus; refpicienti duo, præ reliquis, demonftranda occurrunt.

I.

Demonftratio quadraturæ Curvarum fimplicium in Regula prima.

Præparatio pro Regula prima demonftranda.

Sit itaque (*Fig.* 15.) Curvæ alicujus $AD\delta$ Bafis $AB = x$, perpendiculariter applicata $BD = y$, & area $ABD = z$, ut priùs. Item fit $B\beta = o$, $BK = v$, & rectangulum $B\beta HK$ (ov) æquale fpatio $B\beta\delta D$. TAB. II.

Eft ergo $A\beta = x + o$, & $A\delta\beta = z + ov$. His præmiffis, ex relatione inter x & z ad arbitrium affumptâ, quæro y ifto, quem fequentem vides, modo.

Pro lubitu fumatur $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, five $\frac{4}{9}x^3 = zz$. Tum $x + o$ $(A\beta)$ pro x, & $z + ov$ $(A\delta\beta)$ pro z fubftitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3x^2o + 3xo^2 + o^3 =$ (ex natura Curvæ) $z^2 + 2zov + o^2v^2$. Et fublatis ($\frac{4}{9}x^3$ & zz) æqualibus, reliquifque per o divifis, reftat $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam fupponamus $B\beta$ in

infinitum diminui & evanescere, sive o esse nihil, erunt v & y æquales, & Termini per o multiplicati evanescent, quare restabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, sive $\frac{2}{3}xx (= zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, sive $x^{\frac{1}{2}} (= \frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}) = y$.

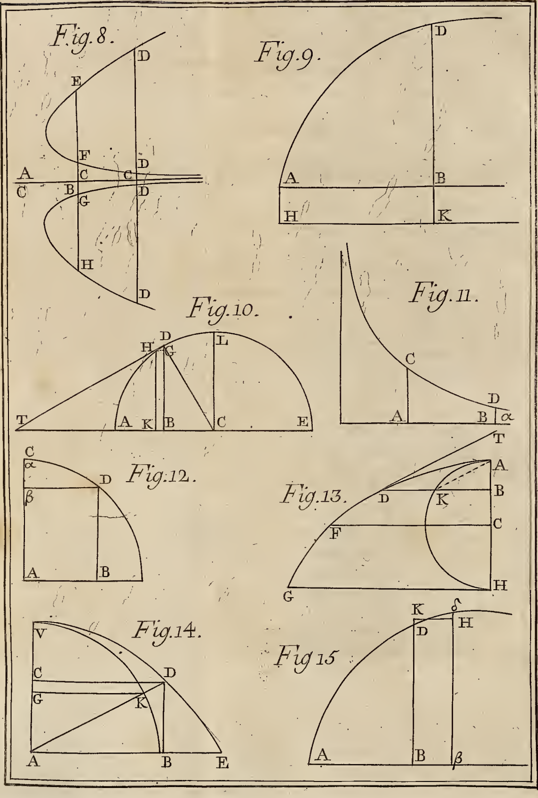
Quare è contra, si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$.

Demonstratio.

Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$; sive ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, & $m+n = p$, si $cx^{\frac{p}{n}} = z$, sive $c^n x^p = z^n$: tum $x+o$ pro x, & $z+ov$ (sive, quod perinde est, $z+oy$) pro z, substitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$, &c. $= z^n + noyz^{n-1}$, &c. reliquis nempe Terminis, qui tandem evanescerent, omissis. Jam sublatis $c^n x^p$ & z^n æqualibus, reliquísque per o divisis, restat $c^n px^{p-1} = nyz^{n-1} (= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^n x^p}{cx^{\frac{p}{n}}}$ sive, dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ sive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c, & $m+n$ pro p, hoc est, m pro $p-n$, & na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare è contra si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Inventio Curvarum quæ possunt quadrari.

Hinc in transitu notetur modus quo Curvæ tot quot placuerit, quarum areæ sunt cognitæ, possunt inveniri; sumendo nempe quamlibet


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig 15

libet æquationem pro relatione inter aream z & basin x ut inde quæratur applicata y. Ut si supponas $\sqrt{aa+xx}=z$, ex calculo invenies $\frac{x}{\sqrt{aa+xx}}=y$. Et sic de reliquis.

II.

Demonstratio resolutionis Æquationum affectarum.

Alterum demonstrandum est literalis Æquationum affectarum resolutio. Nempe, quòd Quotiens, cùm x sit satis parva, quo magis producitur eo magis ad veritatem accedit, ut defectus (p, q, vel r, &c.) quo distat ab exacto valore ipsius y, tandem evadat minor quavis data quantitate; & in infinitum producta sit ipsi y æqualis. Quod sic patebit.

1. Quoniam ex ultimo Termino Æquationum, quarum p, q, r, &c. sunt Radices, quantitas illa, in qua x est minimæ dimensionis (hoc est, plusquam dimidium istius ultimi Termini, si supponis x satis parvam esse) in qualibet operatione perpetuo tollitur: iste ultimus Terminus (per 1. 10. *Elem.*) tandem evadet minor quavis data quantitate; & prorsus evanescet si opus infinite continuatur.

Nempe si $x=\frac{1}{2}$, erit x dimidium omnium $x+x^2+x^3+x^4$, &c., & x^2 dimidium omnium $x^2+x^3+x^4+x^5$, &c. Itaque si x superet $\frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x+x^2+x^3$, &c., & x^2 plusquam dimidium omnium $x^2+x^3+x^4$, &c. Sic si $\frac{x}{b}$ major sit $\frac{1}{2}$, erit x plusquam dimidium omnium $x+\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{bb}$, &c. Et sic de reliquis. Et numeros coefficientes quod attinet, illi plerumque descrescunt perpetuo, vel si quando increscant, tantùm opus est ut x aliquoties adhuc minor supponatur.

2. Si ultimus Terminus alicujus Æquationis continuo diminuatur donec tandem evanescat, una ex ejus Radicibus etiam diminuetur donec cum ultimo Termino simul evanescat.

3. Quare quantitatum p, q, r, &c. unus valor continuo decres-

cit donec tandem, cùm opus in infinitum producitur, penitus evanescat.

4. Sed valores istarum p, q, vel r, &c. unâ cum Quotiente eatenus extractâ adæquant Radices Æquationis propositæ (Sic in resolutione Æquationis $y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$, supra ostensâ, percipies $y = a + p = a - \frac{1}{4}x + q = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + r$, &c.) Unde satis liquet propositum, quòd Quotiens infinite productus sit unus ex valoribus de y.

Idem patebit substituendo Quotientem pro y in Æquationem propositam. Videbis enim Terminos illos sese perpetuo destruere, in quibus x est minimarum dimensionum.

OPUSCULUM II.

METHODUS
FLUXIONUM ET SERIERUM INFINITARUM,

Cum ejuſdem

APPLICATIONE AD CURVARUM GEOMETRIAM;

AUCTORE

ISAACO NEWTONO,

Equite & Regiæ Societatis Præſide.

Anglicè edita

à JOHANNE COLSONO M. A. & R. S. S. &c.

LONDINI An. 1736.

METHODUS
FLUXIONUM ET SERIERUM INFINITARUM.

INTRODUCTIO.

De Reſolutione Æquationum per Series infinitas.

CUM animadvertiſſem, quòd multi ex recentioribus Geometris, neglectâ Veterum ſyntheticâ methodo, præcipuam dederant operam colendæ arti analyticæ, quâ freti perficere valuerunt tot, & tam ardua, ut omnes geometricas ſpeculationes pertractaſſe & exhauſiſſe videantur, præter Curvarum quadraturas, & nonnulla alia hujus generis nondum ſatis perſpecta & ponderata: non extra rem putavi libellum hunc in Tyronum Geometrarum gratiam conſcribere, in quo fines Analyſeos proferre, & Curvarum doctrinam augere conatus ſum.

Operatio-

Operationes, quæ *ſpeciebus*, & eæ quæ vulgaribus *numeris* perficiuntur, perſimiles ſunt, & ſolùm differre videntur characteribus quibus exponuntur, quorum primi ſunt generales & indefiniti, alteri verò definiti, & peculiares; quapropter miror neminem animum appuliſſe (ſi ſaltem excipias Hyperbolæ quadraturam inventam à NICOLAO MERCATORE) ad ſpeciebus accommodandam nuper repertam doctrinam Fractionum decimalium, præcipuè cùm ſic via fieri potuiſſet ad inventa difficiliora & majoris momenti. Quia verò hæc ſpecierum doctrina eandem habet rationem ad Algebram, ac numerorum decimalium ſcientia ad vulgarem Arithmeticam; hinc facilè additionem, ſubtractionem, diviſionem, multiplicationem, & Radicum extractionem diſcere quis poteſt, dummodo in decimali ac ſpecioſâ Arithmeticâ verſatus ſit, nec animum divertat unquam ab analogiâ, quæ eſt inter decimales Fractiones, & algebraïcos Terminos in infinitum productos. Nam, quod numeris accidit, id eſt, quòd eò magis eorum valor decreſcit in decimali, vel ſubdecuplâ ratione, quò magis ad dextram accedunt, id, reſpectivè, locum etiam habet in ſpeciebus, quando Termini (ut ſæpius in ſequentibus imperatur) juxta dimenſiones Numeratoris, vel Denominatoris cujuſque ſunt diſpoſiti in uniformem progreſſionem in infinitum prolatam. Et, ut Fractiones decimales hoc afferunt commodi, quòd vulgares fractæ, & radicales Quantitates, ad Arithmeticam decimalem relatæ, integrorum numerorum naturam aliquatenùs induunt, & ut integræ tractari poſſunt; ſic, utilitas, quæ ſpecioſas infinitas Series conſequitur, eſt, quòd omnigeni complicati Termini (ut Fractiones, quarum Denominator complexus eſt; Radices complexarum Quantitatum, aut affectarum Æquationum &c.) redigi poſſunt ad ſimplicium Quantitatum ordinem, id eſt, ad infinitam Fractionum Seriem, quarum Numeratores, & Denominatores ſunt ſimplices Termini, quo pacto labor non longus ſuperat difficultates, quæ ſub aliâ formâ ferè inſuperabiles viſæ fuiſſent. Quamobrem

Primò oſtendam quomodo hæ Reductiones perfici poſſint, aut, quomodo compoſitæ Quantitates reduci poſſint ad ſimplices Terminos, præcipuè cùm computandi methodus obvia non eſt.

Deinde hanc Analyſim applicabo ad ſolutionem Problematum.

Ratio

Ratio reducendi per Divifionem, & per Extractionem Radicum patebit fequentibus exemplis, ubi comparaveris invicem Methodos, quæ adhibentur in decimali, & fpeciosâ Arithmeticâ.

Exempla Reductionum per Divifionem.

Propofitâ Fractione $\frac{aa}{b+x}$, divide aa per $b+x$, ut videbis in fequenti fchemate.

$$b+x)\,aa+0\,(\frac{aa}{b}-\frac{aax}{bb}+\frac{aaxx}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5},\ \&c.$$

$$aa+\frac{aax}{b}$$

$$0-\frac{aax}{b}+0$$

$$-\frac{aax}{b}-\frac{aaxx}{bb}$$

$$0+\frac{aaxx}{bb}+0$$

$$+\frac{aaxx}{bb}+\frac{aax^3}{b^3}$$

$$0-\frac{aax^3}{b^3}+0$$

$$-\frac{aax^3}{b^3}-\frac{aax^4}{b^4}$$

$$0+\frac{aax^4}{b^4}+0,\ \&c.$$

Quotiens igitur eft $\frac{aa}{b}-\frac{aax}{bb}+\frac{aaxx}{b^3}-\frac{aax^3}{b^4}+\frac{aax^4}{b^5}$ &c, quæ Series in infinitum prolata æquivalet $\frac{aa}{b+x}$: Si verò fumas x pro primo Divisoris Termino (fic $x+b$) $aa+0$) Quotiens erit $\frac{aa}{x}-\frac{aab}{xx}+\frac{aabb}{x^3}-\frac{aab^3}{x^4}$; &c., quem inveniens operando ut fupra

Pariter Fractio $\frac{1}{1+xx}$ mutabitur in $1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10}$; &c. vel in $x^{-2} - x^{-4} + x^{-6} - x^{-8} + x^{-10}$; &c.

Et Fractio $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x}$ fiet $2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}} - 73x^3$; &c.

Hìc opportunè obſervandum eſt, quòd ego, pro $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{xx}$; $\frac{1}{x^3}$; $\frac{1}{x^4}$; &c. adhibeo x^{-1}; x^{-2}; x^{-3}; x^{-4}; &c., & $x^{\frac{1}{2}}$; x^{3}; $x^{\frac{5}{2}}$; $x^{\frac{1}{3}}$; $x^{\frac{2}{3}}$; &c. pro $\sqrt{x}$; $\sqrt{x^3}$; $\sqrt{x^5}$; $\sqrt[3]{x}$; $\sqrt[3]{xx}$; &c, ac $x^{-\frac{1}{2}}$; $x^{-\frac{2}{3}}$; $x^{-\frac{1}{4}}$; &c. pro $\frac{1}{\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{xx}}$; $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, &c., & id nixus Analogiâ, ut perſpicies ex ſequenti, aut ſimili geometricâ Progreſſione. x^3; $x^{\frac{5}{2}}$; xx; $x^{\frac{3}{2}}$; x^1; $x^{\frac{1}{2}}$; x^0, (vel 1;) $x^{-\frac{1}{2}}$; x^{-1}; $x^{-\frac{3}{2}}$; x^{-2}; $x^{-\frac{5}{2}}$; &c.

Eodem pacto pro $\frac{aa}{x} - \frac{a^2b}{xx} + \frac{a^2b^2}{x^3}$; &c. ſcribi poteſt $a^2x^{-1} - a^2bx^{-2} + a^2b^2x^{-3}$; &c.

Pariter pro $\sqrt{a^2 - x^2}$ ſcribere licet $\overline{aa - xx}|^{\frac{1}{2}}$, & $\overline{aa - xx}|^2$ pro Quadrato ipſius $aa - xx$, & $\overline{\frac{ab^2 - y^3}{by + yy}}|^{\frac{1}{3}}$ pro $\frac{\sqrt[3]{ab^2 - y^3}}{\sqrt{by + y^2}}$, & ſic de ceteris.

Igitur haud impropriè diſtingui poſſent Poteſtates in *Affirmativas*, & *Negativas*; *Integras*, & *Fractas*.

Exempla Reductionum per Extractionem Radicis.

Si proponatur Quantitas $aa + xx$, ejus Radix quadrata ſic extrahi poteſt.

$$aa + xx\ \left(a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} + \frac{7x^{10}}{256a^9} - \frac{21x^{12}}{1024a^{11}}\right.$$

$$\underline{aa}$$

$$0 + xx$$

$$\underline{+ xx + \frac{x^4}{4aa}}$$

$$- \frac{x^4}{4aa}$$

$$\underline{- \frac{x^4}{4aa} - \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{64a^6}}$$

$$+ \frac{x^6}{8a^4} - \frac{x^8}{64a^6}$$

$$\underline{+ \frac{x^6}{8a^4} + \frac{x^8}{16a^6} - \frac{x^{10}}{64a^8} + \frac{x^{12}}{256a^{10}}}$$

$$- \frac{5x^8}{64a^6} + \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}};\ \&c.$$

$$\underline{- \frac{5x^8}{64a^6} - \frac{5x^{10}}{128a^8} + \frac{5x^{12}}{512a^{10}}}$$

$$+ \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{512a^{10}};\ \&c.$$

$$\underline{+ \frac{7x^{10}}{128a^8} + \frac{7x^{12}}{256a^{10}}}$$

$$- \frac{21x^{12}}{512a^{10}};\ \&c.$$

Itaque Radix inventa eſt $a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5}$; &c., ubi notari poteſt, quòd circa finem Operationis negligo Terminos omnes, quorum Dimenſiones ſuperant Dimenſionem Termini, quem ultimum eſſe volo; *ex. gr.* $\frac{x^{12}}{a^{11}}$.

Licet autem ordinem Terminorum ſic invertere, $xx + aa$, ac tunc Radix inventa foret $x + \frac{aa}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} + \frac{a^6}{16x^5} - \frac{5a^8}{128x^7}$; &c.

Pariter Radix ipsius $aa - xx$ est $a - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5}$; &c.

Et Radix $x - xx$ est $x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}}$, &c.

Ipsius $aa + bx - xx$ est $a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{bbxx}{8a^3}$; &c.

Et $\sqrt{\frac{1 + axx}{1 - bxx}}$ est $\frac{1 + \frac{1}{2}axx - \frac{1}{8}aax^4 + \frac{1}{16}a^3x^6;\ \&c.}{1 - \frac{1}{2}bxx - \frac{1}{8}bbx^4 - \frac{1}{16}b^3x^6;\ \&c.}$

quæ præterea (reipsâ dividendo) fit

$$
\begin{array}{llll}
1 + \frac{1}{2}bxx & + \frac{3}{8}bbx^4 & + \frac{5}{16}b^3x^6 & \\
 + \frac{1}{2}a & + \frac{1}{4}ab & + \frac{3}{16}abb; & \&c. \\
 & - \frac{1}{8}aa & - \frac{1}{16}aab & \\
 & & + \frac{1}{16}a^3. &
\end{array}
$$

Sed Operationes istæ sæpius (Quantitatibus ritè præparatis) breviores fieri possunt, ut in superiori Exemplo, in quo quærebatur $\sqrt{\frac{1 + axx}{1 - bxx}}$, si Numeratoris & Denominatoris Forma non fuisset eadem, cuncta duxissem in $\sqrt{1 - bxx}$, unde habuissem $\frac{\sqrt{1 + axx - abx^4 \atop - b}}{1 - bxx}$, & opus perfecissem extrahendo Radicem solius Numeratoris, & eam dividendo per Denominatorem.

Hinc, puto, satis apparet, quo pacto quævis aliæ Radices extrahi possint; & quomodo ad infinitas simplicium Terminorum Series revocari valeant compositæ Quantitates quantùmvis Radicalibus, aut Denominatoribus (ut $x^3 + \sqrt[3]{\frac{\sqrt{x - \sqrt{1 - xx}}}{axx + x^3}} - \frac{\sqrt[5]{x^3 + 2x^5 - x^{\frac{3}{2}}}}{\sqrt[3]{x + xx - \sqrt{2x - x^{\frac{2}{3}}}}}$) implicatæ.

De Reductione Affectarum Æquationum.

Jam explicare aggredior, quâ ratione Radices affectarum Æquationum in Series infinitas deduci poſſint; quod argumentum magis accuratè mihi perſequendum eſt; quia, quæ hactenus tradita fuerunt à Mathematicis de numeralibus Æquationibus, valde perplexa ſunt, & ſupervacaneis Operationibus intricata, ita ut Exemplo nobis eſſe non poſſint ad opus in ſpeciebus perficiendum. Idcircò Primùm indicabo, quomodo breviter reſolvi poſſint numerales Æquationes affectæ, Secundò eandem Methodum ad ſpecies transferam.

Sit Æquatio $y^3 - 2y - 5 = 0$ reſolvenda, & 2 ſit Numerus, (quomodocunque tandem repertus) qui minùs quàm decimâ ſui Parte differat à verâ Radice. Tunc aſſumo $2 + p = y$; & ſubſtituo $2 + p$ pro y in aſſignatâ Æquatione, undè exſurgit nova Æquatio $p^3 + 6pp + 10p - 1 = 0$; aut $p = 0,1$, quæ Quantitas quàmpropiùs Veritati accedit; quapropter eam Quotienti appono, & fingo $0,1 + q = p$, & hunc fictitium Valorem pro p repono, ut antea, quod dat $q^3 + 6,3qq + 11,23q + 0,061 = 0$; & hinc conficitur $11,23q + 0,061 = 0$, quod propè verum eſt, aut (quod propius) $q = -0,0054$; hoc autem obtinetur dividendo 0,061 per 11,23, donec habeantur tot Figuræ, quot loca ſunt inter primas hujus, & Quotientis præcipui Figuras excluſivè, ut hìc duo loca ſunt inter 2 & 0,005. Scribo igitur $-0,0054$, in inferiore Quotientis parte, quia eſt Quantitas Negativa, & facto $-0,0054 + r = q$, ſubſtituo ut ſupra, & ita proſequor Operationem quóuſque libet, ut videtur in ſubjecto Diagrammate.

$y^3 - 2y - 5 = 0$	$+ 2,10000000$ $- 0,00544852$ $+ 2,09455148$; &c. $= y$
$2 + p = y$ $\quad + y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6pp + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
Aggregatum	$- 1 + 10p + 6pp + p^3$
$0,1 + q = p$ $\quad + p^3$ $+ 6pp$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3qq + q^3$ $+ 0,06 + 1,2 + 6$ $+ 1 + 10,$ $- 1$
Aggregatum	$0,061 + 11,23q + 6,3qq + q^3$
NB. $-0,0054 + r = q$ $\quad + q^3$ $+ 6,3qq$ $+ 11,23q$ $+ 0,061$	$- 0,0000001$ * $+ 0,000$ *r ** $+ 0,0001837$ * $- 0,068$ * * $- 0,060642$ $\quad + 11,23.$ $+ 0,061$
Aggregatum	$+ 0,0005416 + 11,162r$
$- 0,00004852 + s = r$	

Sed opus, præfertim cùm Æquationes plurium Dimenſionum ſunt, ſub finem haud parùm brevius reddi poteſt hoc pacto. Statue quòuſque Radicis Extractionem velis extendere, & quot loca ſuperſunt implenda in Quotiente, tot (incipiens à primo) ſume in Coefficiente penultimi Termini Æquationis, quæ in Diagrammatis dextrâ parte formatur, ac rejice Decimales, qui ſunt extra hæc loca. At Decimales in ultimo Termino negligendos invenies, addens ſuperiori locorum numero tot loca, quot decimalium numerorum plena jam ſunt in Quotiente. Sed in antepenultimo Termino rejice eos,

NB. Habebatur $- 0,0000001\,\not{5}\not{7}\not{4}\not{6}\not{4} + 0,000\not{0}\not{8}\not{7}\not{4}\not{8}r + \not{0},\not{0}\not{1}\not{6}\not{2}r^2 + r^3$
$+ 0,000183708$ $\quad - 0,068\not{0}4$ $\quad + \not{6},\not{3}$
ſed, cùm Numeri tranſverſo calamo notati omittendi ſint, & Tabulam turbarent, eos huc rejecimus.

eos, qui ſunt poſt tot loca, quot reſtant dempto locorum plenorum ex implendorum numero; atque ita porrò progrediendo arithmeticè juxta locorum intervalla: Vel, quod idem eſt, ſemper abſcindi debent tot Figuræ, quot in penultimo Termino, ita ut ima loca efficiant Progreſſionem arithmeticam juxta Terminorum Seriem, aut, (cùm aliter accidit) ſupponi debent ſuppleta circulis; ſic in præſenti Exemplo, ſi Opus perſequi nolim ultra octavum Decimalium locum, poſtquàm poſui pro q, $0{,}0054+r$ (ubi quatuor loca Decimalium impleta ſunt in Quotiente, ac totidem implenda remanent) negligere poſſum Figuras, quæ quinque loca inferiora tenent, quas idcircò tranſverſo calamo notavi, & omittere poſſem etiam primum Terminum r^3 quamvis illius Coefficiens eſſet $0{,}99999$, &c. Deletis igitur his Figuris, Operatio ſequens dat Aggregatum; $0{,}0005416+11{,}162r$, unde, per Diviſionem productam quòuſque Terminus præſcribit, educitur $-0{,}00004852=r$, quæ Quantitas Quotientem, quò volebamus, perducit. Nunc, ſubductâ negativâ Quotientis Parte ex affirmativâ, habebimus $2{,}09455148$, Radicem Æquationis propoſitæ.

Pariter obſervari poteſt, quòd ſi, in Operis initio, dubitarem utrùm $0{,}1=p$ ſatìs Radici propinquaret, pro $10p-1=0$ finxiſſem $6pp+10p-1=0$, & Quotienti appoſuiſſem primam hujus Radicis Figuram, tanquam nihilo propiorem; & benè hoc pacto reperietur ſecunda, aut etiam quarta Figura Quotientis, cùm in ſecundariâ Æquatione, quam tractas, Quadratum ex Coefficiente penultimi Termini decuplum ſaltèm non eſt producti ex ultimo Termino in Coefficientem antepenultimi; Imò quidem ſæpius laborem imminues, præcipuè cùm Æquationes ad plures Dimenſiones aſcendunt, quærendo Figuras omnes Quotienti addendas eâdem methodo, ſcilicet extrahendo minimam Radicum ex tribus ultimis Terminis Æquationis ſecundariæ; ſic enim plerumque Figuras duplo plus Quotienti lucraberis.

Jam ex numeralium ad ſpecioſarum Æquationum ſolutionem tranſeamus; ſed præmittendum eſt

Primò, quòd unus (quicunque tandem ille ſit) ex ſpecioſis, aut literalibus Coefficientibus, quando plures adſunt, à ceteris ſegregandus eſt, aut ſupponendus multò major, aut multò minor quàm reliqui omnes, vel proximior datæ Quantitati. Ratio eſt, quòd quia

ejus

ejus Dimenſiones ſemper creſcunt in Numeratoribus, vel Denominatoribus Terminorum Quotientis, hi Termini jugiter decreſcunt, & idcircò Quotiens aſſiduè accedit ad Radicem quæſitam, ut perſpici poteſt ex iis, quæ ſuperiùs obſervavimus de ſpecie x in Exemplis Reductionum per Diviſionem & Radicis Extractionem. In ſequentibus autem pro his ſpeciebus uſurpabo x vel z; & y; p; q; r; s; &c. pro Radicalibus ſpeciebus extrahendis.

Secundò, quòd cùm Fractiones complexæ, ſive Quantitates ſurdæ occurrunt in propoſitis Æquationibus, aut deinde ſuboriuntur in proceſſu, removendæ ſunt Methodis, quas Analyſtæ ſatìs norunt. Ut ſi haberes $y^3 + \frac{bb}{b-x} yy - x^3 = 0$, Æquationem duc in $b - x$, & ex Producto $\begin{matrix} b \\ -x \end{matrix} y^3 + bbyy \begin{matrix} -bx^3 \\ +x^4 \end{matrix} = 0$ quære Valorem ipſius y. Potes etiam fingere $y \times \overline{b-x} = u$, & ſcribens $\frac{u}{b-x}$ pro y, reperies $u^3 + bbuu - b^3x^3 + 3bbx^4 - 3bx^5 + x^6 = 0$; hinc excude Radicem u; atque ut obtineas y, Quotientem divide per $b - x$. Item ſi Æquatio $y^3 - xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{4}{3}} = 0$ proponeretur, aſſumere potes $y^{\frac{1}{2}} = u$, & $x^{\frac{1}{3}} = z$, ac ſubſtitutis uu pro y, & z^3 pro x, exſurget $u^6 - z^3u + z^4 = 0$, in quâ Æquatione reſolutâ reſtitui debent x, & y. Invenietur enim Radix $u = z + z^3 + 6z^5$, &c., &, reſtituendo y ac x, habebitur $y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{3}} + x + 6x^{\frac{5}{3}}$; &c. & quadrando, $y = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{4}{3}} + 13xx$; &c.

Pariter, ſi adeſſent negativæ Dimenſiones x, vel y, removeri poſſent ducendo in x, vel y; ut, ſi daretur Æquatio $x^3 + 3xxy^{-1} - 2x^{-1} - 16y^{-3} = 0$; duc in x, & y^3, unde conficietur $x^4y^3 + 3x^3y^2 - 2y^3 - 16x = 0$; Et ſi Æquatio eſſet $x = \frac{aa}{y} - \frac{2a^3}{yy} + \frac{3a^4}{y^3}$ multiplica per y^3, & habebis $xy^3 = aayy - 2a^3y + 3a^4$, & ſic de ceteris.

Tertiò, Æquatione ſic præparatâ; Opus incipiendum eſt ab inventione primi ex Terminis Quotientis; ad hujus autem, & ſequentium Terminorum inveſtigationem conducit Regula generalis, cùm

indefini-

indefinitæ ſpecies (x vel y) parvæ ſupponuntur, ad quem caſum duo reliqui poſſunt revocari.

Regula autem hæc eſt. Ex omnibus Terminis, è quibus abſunt ſpecies radicales (y; p; q; r; &c.) elige illum, in quo ſpecies indefinita (x; vel z; &c.) minimæ Dimenſionis eſt; Deinde elige alium Terminum, qui radicalem ſpeciem contineat, & talis ſit, ut Progreſſio Dimenſionum uniuſcujuſque ex ſupradictis ſpeciebus, aut quo majori poteſt gradu deſcendat, aut quo minori aſcendat; Et ſi plures ſunt Termini, quorum Dimenſiones non recedant ab hac Progreſſione, quouſque libet productâ, pariter ſumendi ſunt. Demum ex his Terminis ita ſepoſitis, & nihilo æquatis, excude valorem dictæ radicalis ſpeciei, & illum Quotienti adſcribe.

Sed, ut hæc Regula meliùs intelligatur, illi lucem afferam ſequenti Diagrammate. Fac Angulum BAC, & ejus latera BA, AC, divide in æquales partes, & eductis Perpendicularibus, diſtribue ſpa-

B	x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6	&c.
	x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6	&c.
	xx	xxy	$xxyy$	xxy^3	xxy^4	xxy^5	xxy^6	&c.
	x	xy	xyy	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6	&c.
A	1	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6	&c. C

tium Angulare in æqualia Quadrata vel Parallelogramma, quæ concipies denominata a Dimenſionibus ſpecierum x & y iis inſcriptarum. Deinde, propoſitâ Æquatione, aliquo Signo nota Parallelogramma reſpondentia omnibus ejuſdem Terminis, & Regulam applica duobus, aut fortè pluribus ex Parallelogrammis ita notatis, quorum unum ſit imum in columnâ AB ad ſiniſtram poſitâ, alterum verò contingat Regulam verſùs dextram, & reliqua omnia Regulam non tangentia ſint ſupra eam. Tum ſume eos Æquationis Terminos, qui Parallelogrammis à Regulâ tactis includuntur, & ex iis extrude Quantitatem in Quotiente ponendam. Sic ſi Radix y debeat extrahi ex Æquatione $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7aaxxyy + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$; noto (*Fig.* 1.) Parallelogramma pertinentia ad Ter- TAB. I.

 minos

minos hujus Æquationis Afterico *, ut hic factum vides. Deindè Regulam D E applico ad infimum parallelogrammorum notatorum in finiftrâ columnâ, & Regulam in gyrum dextrorfùm ago ex inferioribus verfùs fuperiora; donec incipiat fimiliter aliud, vel fortè plura ex parallelogrammis notâ diftinctis contingere, & video loca fic tacta effe ea quibus includuntur termini x^3, $xxyy$, & y^6. Igitur ex his effingo Æquationem $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3 = 0$, (quam prætereà, fi placet, redigo ad $u^6 - 7uu + 6 = 0$, ponendo $y = u\sqrt{ax}$,) ac ex ea quæro Valorem ipfius y, quem invenio quadruplicem, nempè $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, è quibus quemlibet affumere poffum pro Quotientis Termino primo, tamen feligendus eft ille qui convenit huic aut illi Radici, quam extrahere cupio.

Sic, propofitâ Æquatione $y^5 - byy + 9bxx - x^3 = 0$; fegrego Terminos $- byy + 9bxx$, & hinc habeo $y = 3x$ pro Quotientis Termino primo.

Et fi daretur $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, acciperem $y^3 + aay - 2a^3$, cujus Radix eft $+a$, quam Quotienti adfcribo.

Pariter, fi haberem $xxy^5 - 3c^4xyy - c^5xx + c^7 = 0$, excerperem $xxy^5 + c^7$, undè obtinerem $y = -\sqrt[5]{\frac{c^7}{xx}}$, quæ Quantitas effet primus Quotientis Terminus. Atque ita porrò.

Sed hoc Termino reperto, fi is aliquam Poteftatem negativam includit, Æquationem deprimo eâdem indefinitæ fpeciei Poteftate, tùm ut neceffarium non fit eam deprimere in ipfâ Refolutione, tùm ut concinnè adhiberi poffit Regula inferiùs tradenda de fuppreffione Terminorum fupervacaneorum. Sic, propofitâ Æquatione $8z^6y^3 + az^6yy - 27a^9 = 0$, cujus Radix incipit à Terminô $\frac{3a^3}{2zz}$; eam deprimo ipfâ zz, antequàm Refolutionem aggrediar, ita ut evadat $8z^4y^3 + az^4yy - 27a^9z^{-2} = 0$.

Tùm, opere progrediente, reliqui Termini, quibus Quotiens augendus eft, eodem pacto excuduntur ex variis Æquationibus fecundariis, fed plerùmque minori conatu; nam totum nego-

tium

tium perficitur dividendo infimum ex iis Terminis, qui & indefinitè parvis ſpeciebus (x, xx, x^3, &c.) ſunt affecti & Radicalium ſpecierum (p, q, r, &c.) expertes, per Quantitatem quâ afficitur Quantitas Radicalis unius Dimenſionibus & libera ab indefinitâ ſpecie, & Quotienti adſcribendo quidquid indè conficitur. Sic in exemplo ſequenti Termini $\frac{x}{4}$, $\frac{xx}{64a}$, $\frac{131x^3}{512aa}$, &c. gignuntur dividendo aax, $\frac{1}{16}aax$, $\frac{131}{128}x^3$, &c. per $4aa$.

Quibus præmiſſis, exhibenda ſupereſt praxis Reſolutionis. Sit igitur Æquatio $y^3+aay+axy-2a^3-x^3=0$, ea cujus petitur Reſolutio. Ex aliquot ejus Terminis conficio fictitiam Æquationem $y^3+aay-2a^3=0$ (juxta ea quæ tertio loco præmiſimus) & hinc obtineo $y-a=0$; quapropter ſcribo in Quotiente $+a$: ſed quia $+a$ non eſt accuratè Valor ipſius y, ſuppono $a+p=y$, & in Terminis Æquationis margini adſcriptæ pono $a+p$ pro y, & iterùm in margine ſcribo Terminos hinc exeuntes (p^3 $+3app+apx$, &c.), inter quos denuò, per tertio loco præmiſſa, eligo Terminos $4aap+aax=0$ tanquam fictitiam Æquationem, quæ cum det $p=-\frac{1}{4}x$, ſcribo in Quotiente $-\frac{1}{4}x$: Quia tamen $-\frac{1}{4}x$ non æquat juſtum Valorem ipſius p, facio $-\frac{1}{4}x$ $+q=p$, & in marginalibus Terminis pro p ſubſtituo $-\frac{1}{4}x$ $+q$, atque Terminos indè confictos ($q^3-\frac{3}{4}qqx+3aqq$, &c.) rurſùs margini adſcribo, è quibus iterùm, juxta præcedentem Regulam, ſegrego Terminos $4aaq-\frac{1}{16}axx=0$ pro fictâ Æquatione, quæ quia præbet $q=\frac{xx}{64a}$, hâc ipſâ Quantitate Quotientem augeo. Item quia $\frac{xx}{64a}$ non eſt accuratus Valor ipſius q, ſuppono $\frac{xx}{64a}+r=q$, & in Terminis marginalibus pro q ſubſtituo $\frac{xx}{64a}+r$, & ſic pergo quòuſque libet, ut præ oculis ponit ſequens Tabella.

$y^3+aay-2a^3+axy-x^3=0$		$y=a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$, &c.
$+a+p=y$	$+y^3$	$+a^3+3aap+3app+p^3$
	$+axy$	$+aax+apx$
	$+aay$	$+a^3+aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}qxx-\frac{3}{4}qqx+q^3$
	$+3app$	$+\frac{3}{16}axx-\frac{3}{2}aqx+3aqq$
	$+apx$	$-\frac{1}{4}axx+aqx$
	$+4aap$	$-aax+4aaq$
	$+aax$	$+aax$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{xx}{64a}+r=q$	$+q^3$	*
	$-\frac{3}{4}qqx$	*
	$+3aqq$	$+\frac{3x^4}{4096a}*+\frac{3}{32}rxx+3arr$
	$+\frac{3}{16}qxx$	$+\frac{3x^4}{1024a}*+\frac{3}{16}rxx$
	$-\frac{1}{2}aqx$	$-\frac{1}{128}x^3 \quad -\frac{1}{2}arx$
	$+4aaq$	$+\frac{1}{16}axx \quad +4aar$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
	$-\frac{1}{16}axx$	$-\frac{1}{16}axx$
$+4aa-\frac{1}{2}ax+\frac{9}{32}xx)+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}(+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$		

Si

Si Quotiens ad certam periodum tantùm perducendus foret, ita ut, ex. gr., in ultimo Termino x non aſcenderet ſupra datam Dimenſionem, faciens Terminorum ſubſtitutionem, eos omitto quos non uſu-venturos prævideo; quâ de re hæc habetur Regula: Primo Termino, qui ſuboritur ex quâvis Quantitate in collaterali margine, tot ſubjungito verſus dextram, quot ſunt Unitates, quibus Index ejus Poteſtatis, quæ altiſſima debet eſſe in Quotiente, excedit Indicem iſtius ſuborti Termini.

Volo, ut præſenti utar exemplo, ut Quotiens (aut in Quotiente ſpecies x) altiùs non aſcendat quàm, puta, ad quartam Dimenſionem. Omitto itaque Terminos omnes poſt x^4, & unum pono poſt x^3: Quocirca pro deletis habendi ſunt omnes Termini poſt ſignum *. Hoc pacto opus proſequere quoad tandem pervenias ad Terminos $\frac{15x^4}{4096a} - \frac{131x^3}{128} + 4aar - \frac{1}{2}arx$, in quibus p, q, r, aut s, quæ repræſentant Radicis extrahendæ ſupplementa, ſunt unius Dimenſionis, & è quibus per Diviſionem tot potes obtinere Terminos, quot deſiderari vidiſti ad Quotientem complendum (id eſt $\frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$); itaque demùm habebis $y = a - \frac{1}{4}x + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$, &c.

Rem meliùs explicaturus addam aliud exemplum reſolvendum. Detur Æquatio $\frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}yy + y - z = 0$; & Quotiens inveniendus ſit uſque ad quintam Dimenſionem tantùm, & ſuperflui Termini rejecti concipiantur poſt ſignum *&c.*

$\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}yy+y-z=0$		$y=z+\frac{1}{2}zz+\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$, &c.
$z+p=y$	$+\frac{1}{5}y^5$	$+\frac{1}{5}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{4}y^4$	$-\frac{1}{4}z^4-pz^3$, &c.
	$+\frac{1}{3}y^3$	$+\frac{1}{3}z^3+pzz+ppz$, &c.
	$-\frac{1}{2}yy$	$-\frac{1}{2}zz-pz-\frac{1}{2}pp$
	$+y$	$+z+p$
	$-z$	$-z$
$\frac{1}{2}zz+q=p$	$+ppz$	$+\frac{1}{4}z^5$, &c.
	$-\frac{1}{2}pp$	$-\frac{1}{8}z^4-\frac{1}{2}qzz$, &c.
	$-pz^3$	$-\frac{1}{2}z^5$, &c.
	$+pzz$	$+\frac{1}{2}z^4+qzz$
	$-pz$	$-\frac{1}{2}z^3-qz$
	$+p$	$+\frac{1}{2}zz+q$
	$+\frac{1}{5}z^5$	$+\frac{1}{5}z^5$
	$-\frac{1}{4}z^4$	$-\frac{1}{4}z^4$
	$+\frac{1}{3}z^3$	$+\frac{1}{3}z^3$
	$-\frac{1}{2}zz$	$-\frac{1}{2}zz$
$1-z+\frac{1}{2}zz)\ \frac{1}{6}z^3-\frac{1}{8}z^4+\frac{1}{20}z^5\ (\frac{1}{6}z^3+\frac{1}{24}z^4+\frac{1}{120}z^5$		

Pariter

Paritèr, si proponas Æquationem $\frac{63}{2816}y^{11} + \frac{35}{1152}y^9 + \frac{5}{112}y^7 + \frac{3}{40}y^5 + \frac{1}{6}y^3 + y - z = 0$ resolvendam solùm ad nonam usque Quotientis Dimensionem, rejicere potes ante ipsum Operis exordium $\frac{63}{2816}y^{11}$, & inter operandum omnes Terminos qui superant z^9, admittere autem unum post z^7, duos post z^5; observabis enim Quotientem paritèr ascensurum per duarum Unitatum intervalla, hoc pacto z, z^3, z^5, z^7, &c. Demùm autem habebis $y = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c.

Hinc detegitur artificium, quo Æquationes affectæ *in infinitum*, aut constantes infinito Terminorum numero, tamen resolvi possunt: Videlicet, antequàm opus aggrediaris, rejice omnes Terminos in quibus Dimensio speciei indefinitè parvæ & non affectæ à Radicali specie excedit altissimam Dimensionem in Quotiente requisitam, aut è quibus, cùm pro Radicali specie substituis primum Terminum detectum ope Parallelogrammi, ut suprà, exsurgere nequeunt nisi Termini excedentes; eâ de causâ in ultimo exemplo Terminos omisi ultra y^9, licèt ad infinitum progrederentur. Eodem pacto, ut Cubica Radix extrahatur usque ad quartam Dimensionem ipsius z ex Æquatione

$$0 = \begin{cases} -8 + zz - 4z^4 + 9z^6 - 16z^8, \text{ \&c.} \\ +y \text{ in } zz - 2z^4 + 3z^6 - 4z^8, \text{ \&c.} \\ -yy \text{ in } zz - z^4 + z^6 - z^8, \text{ \&c.} \\ +y^3 \text{ in } zz - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6 - \frac{1}{4}z^8, \text{ \&c.} \end{cases}$$

omitto Terminos in infinitum omnes superiores iis qui conflantur ex $+y^3$ in $zz - \frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{3}z^6$, & ex $-yy$ in $zz - z^4 + z^6$, atque ex $+y$ in $zz - 2z^4$, & ex 1 in $-8 + zz - 4z^4$. Quapropter hanc solam Æquationem resolvendam assumo $\frac{1}{3}z^6y^3 - \frac{1}{2}z^4y^3 + zzy^3$

$z^4y^3 + zzy^3 - z^6yy + z^4yy - zzyy - 2z^4y + zzy - 4z^4 + zz - 8 = 0$: Primus enim Quotientis Terminus ($2z^{-\frac{2}{3}}$) subſtitutus pro y in eâ Æquationis depreſſæ per $z^{\frac{2}{3}}$ parte quam negleximus, dat ſemper plus quàm quatuor Dimenſiones.

Quadratis Æquationibus accomodari poſſunt quæ de altioribus diximus; ut ſi peteretur Radix hujus Æquationis

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} yy \\ -y \text{ in } a + x + \frac{xx}{a} + \frac{x^3}{aa} + \frac{x^4}{a^3}, \text{ \&c.} \\ + \frac{x^4}{4aa} \end{array} \right.$$

uſque ad x^6; omitto cunctos in infinitum Terminos altiores quàm $-y$ in $a + x + \frac{xx}{a}$, & ſolùm aſſumo Æquationem $yy - ay - xy - \frac{xx}{a}y + \frac{x^4}{4aa} = 0$, quam reſolvo aut more ſolito faciens $y = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}x + \frac{xx}{2a} - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ax + \frac{3}{4}xx + \frac{x^3}{2a}}$, aut breviùs & faciliùs jam traditâ affectarum Æquationum methodo, quâ obtinebis $y = \frac{x^4}{4a^3} - \frac{x^5}{4a^4}$ ✳, in quâ ultimus requiſitus Terminus evaneſcit, aut æqualis nihilo fit.

Radices autem poſtquàm extractæ ſunt uſque ad ſatis magnum Terminorum numerum, ulteriùs quoùſque libet extrahi poſſunt, ſolâ Serierum Analogiâ benè obſervatâ. Sic in infinitum proſequi potes hanc $z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c. (quæ eſt Radix Æquationis infinitæ $z = y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4$ &c.) ſemper dividendo Terminum ultimum per hanc Numerorum ſeriem 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c.; & hæc $z - \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$, &c. produci poteſt, continuam faciendo Diviſionem

per

per Numeros 2×3, 4×5, 6×7, 8×9, &c.: Rurſus hujus $a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c., quotvis Termini reperiri poſſunt, jam repertos reſpectivè multiplicando per Fractiones $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{3}{6}$, $-\frac{5}{8}$, $-\frac{7}{10}$, &c., & ſic de reliquis.

Sed, cùm inveſtigatur primus Quotientis Terminus, aut aliquando etiam ſecundus, vel tertius, ſeſe offerre poteſt difficultas ſuperanda; nam, ejus valor, ut ſupra detectus, eſſe poteſt Quantitas ſurda, vel inextricabilis Radix altioris Æquationis affectæ; quando autem id fortè evenit, Radix iſta, (dummodò non ſit impoſſibilis,) exponi poteſt per aliquam Litteram, quo facto procedemus more ſolito, tanquam ſi cognita foret. Ut in exemplo $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, ſi Radix Æquationis $y^3 + aay - 2a^3 = 0$ eſſet ſurda aut incognita, ponere potuiſſem aliquam Litteram (puta, b) pro eâ, & perfeciſſem Solutionem, ut ſequitur, poſito quòd inveniendus eſſet Quotiens tantùm uſque ad tertiam Dimenſionem.

$y^3 + aay + axy - 2a^3 - x^3 = 0$. Fac $aa + 3bb = cc$: Tunc

$$y = b - \frac{abx}{cc} + \frac{a^4bxx}{c^6} + \frac{x^3}{cc} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8} - \frac{a^5bx^3}{c^8} + \frac{a^5b^3x^3}{c^{10}}; \text{ \&c.}$$

$b + p = y \quad + y^3$	$+ b^3 + 3bbp + 3bpp + p^3$
$+ axy$	$+ abx + apx$
$+ aay$	$+ aab + aap$
$- x^3$	$- x^3$
$- 2a^3$	$- 2a^3$
$-\frac{abx}{cc} + q = p \quad + p^3$	$-\frac{a^3b^3x^3}{c^6}$; &c.
$+ 3bpp$	$+\frac{3aab^3xx}{c^4} - \frac{6ab^2x}{c^2}q$; &c.
$+ apx$	$-\frac{aabxx}{cc} + aqx$
$+ pcc$	$- abx + ccq$
$- x^3$	$- x^3$
$+ abx$	$+ abx$

$$cc + ax - \frac{6abbx}{cc}\Big) \frac{a^4bxx}{c^4} + x^3 + \frac{a^3b^3x^3}{c^6} \Big(\frac{a^4bxx}{c^6} + \frac{x^3}{cc} + \frac{a^3b^3x^3}{c^8}; \text{ \&c.}$$

 Hìc,

Hic, ſcripto b in Quotiente, fingo $b+p=y$, & poſteà illum ſubſtituo pro y, ut vides, undè oritur p^3+3bpp, &c., rejectis Terminis $b^3+aab-2a^3$, ut nihilo æqualibus; ſuppoſuimus enim b eſſe Radicem Æquationis $y^3+aay-2a^3=0$. Termini verò $3bbp+aap+abx$ dant $p=-\frac{abx}{3bb+aa}$, quæ Quantitas adjungenda eſt Quotienti, & pro p ſubſtituendum $-\frac{abx}{3bb+aa}+q$.

Sed, brevitatis gratiâ, ſcribo cc pro $3bb+aa$, quæ tamen Quantitas $3bb+aa$ reſtituenda eſt, quandocunque percipiam hoc pacto Terminos fieri breviores. Opere peracto, aſſumo Numerum aliquem pro a, & reſolvo Æquationem $y^3+aay-2a^3=0$, ut ſupra indicavi de numeralibus Æquationibus, & pro b pono aliquam ex ejus Radicibus, ſi tres Radices ea habeat. Seu potiùs hanc Æquationem libero à ſpeciebus, (quantùm fieri poteſt,) & præſertim ab indefinitis, eâ methodo quam ſupra inſinuavimus; & pro reliquis, ſi quæ reſtant quæ expelli nequeant, pono Numeros: Sic $y^3+aay-2a^3=0$ liberari poteſt ab a, Radice per a diviſâ, undè fit $y^3+y-2=0$, cujus Radicem quære, per a multiplica, & ſubſtitue pro b.

Hactenùs ſpecies indefinitas parvas eſſe ſuppoſuimus. Si verò quàm propiùs accedere ponerentur datæ Quantitati, pro indefinitè parvâ differentiâ iſtâ ſpeciem aliquam adhibeo, quâ ſubſtitutâ ſolvo Æquationem ut anteà: Scio, *ex. gr.*, aut ſuppono, quòd in Æquatione $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}yy+y-x+a=0$ eſt x ferè æqualis alicui Quantitati, ut a. Dico igitur earum differentiam eſſe z, & ſcribendo pro x, $a+z$, vel $a-z$, conficietur $\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}yy+y\pm z=0$, quæ ſolvi poteſt Methodo jam præſcriptâ.

Quòd ſi hæc ſpecies poneretur indefinitè magna, ſcriberem aliquam ſpeciem pro ejus Reciprocâ, quæ idcirco eſſet indefinitè parva, & ſpecie iſtâ ſubſtitutâ, progredior ad Reſolutionem more ſolito. Proponatur, *ex. gr.*, $y^3+yy+y-x^3=0$, & ſciamus

fciamus aut fingamus, quòd x fit Quantitas permagna; tunc pono z pro ejus parvâ Reciprocâ $\frac{1}{x}$, & $\frac{1}{z}$ fubftitutâ pro x dabit $y^3 + yy + y - \frac{1}{z^3} = 0$, cujus Radix eft $y = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9}z + \frac{7}{81}zz + \frac{5}{81}z^3$, &c., quæ, reftituto, fi placet, x, evadet $y = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{81xx} + \frac{5}{81x^3}$, &c.

Sin autem iftarum artium nulla ex animi fententiâ fuccederet, ad aliam confugere potes. Ut, in Æquatione $y^4 - xxyy + xyy + 2yy - 2y + 1 = 0$, in quâ primus Radicis Terminus quæri deberet ex Hypothefi, quòd $y^4 + 2yy - 2y + 1 = 0$; fed hæc Æquatio nullam habet Radicem poffibilem; quare tentabis quid poffis aliquâ aliâ ratione conficere. Potes, *ex. gr.*, fupponere, quòd x parùm differat à $+2$, vel quòd $2 + z = x$; fubftituens autem $2 + z$ pro x invenies $y^4 - zzyy - 3zyy - 2y + 1 = 0$, & Quotiens incipiet ab Unitate. Potes etiam fupponere quòd x eft Quantitas indefinitè magna, vel quòd $\frac{1}{x} = z$, undè deduces $y^4 - \frac{yy}{zz} + \frac{yy}{z} + 2yy - 2y + 1 = 0$, & z chorum Terminorum ducet in Quotiente.

Hoc pacto procedens juxta varias Hypothefes, potes variis modis Radicem extrahere & exprimere.

Si vis determinare quot modis hoc perfici poteft, tibi perfpiciendum eft quot funt Quantitates, quæ fcriptæ in Æquatione propofitâ pro indefinitâ fpecie Æquationem illam divifibilem reddunt per y + vel — aliquâ Quantitate, vel per y tantùm; Hoc, *ex. gr.*, accidet in Æquatione $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, fi fubftituas $+a$ vel $-a$, vel $-2a$, vel $-\overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$ pro x. Quocirca benè potes fupponere Quantitatem x parum differre ab $+a$ vel $-a$ vel $-2a$ vel $-\overline{2a^3}|^{\frac{1}{3}}$, & totidem modis extrahere Radicem Æquationis propofitæ, & forfan rurfùs totidem modis ponendo has differentias indefinitè magnas. Præterea, fi fumas pro indefinitâ Quan-

 titate

titate nunc hanc, nunc illam ex speciebus Radicem exprimentibus, voti compos fies fortè aliis modis; & iterum aliis substituendo pro indefinitâ specie quosvis fictitios valores, ut $az+bzz$, $\frac{a}{b+z}$, $\frac{a+cz}{b+z}$; &c., & operando, ut anteà, in Æquatione hìnc proveniente.

Ut autem in apertum ponatur veritas hujus Conclusionis, nempe quòd Quotientes sic inventi, & producti ad libitum adeò propè ad Æquationis Radicem accedunt, ut denique ab eâ differant Quantitate minori, quàm quævis assignabilis, & idcirco quòd in infinitum protracti omninò ab eâ non differunt, animadvertendum est quòd Quantitates, quæ sunt in sinistrâ Columnâ dextri Lateris Diagrammatis, sunt ultimi Termini Æquationum, quarum Radices sunt p, q, r, s; &c., & quòd, illis evanescentibus, evanescunt quoque Radices p, q, r, s; &c., id est, differentiæ inter Quotientem & Radicem quæsitam; ita ut Quotiens nihil omninò tunc differat à verâ Radice. Quapropter sub ipsum Operis initium, si videas quòd Termini, qui sunt in indicatâ Columnâ, sese omnes invicem destruant, concludendum est Quotientem huc usque protractum perfectam Æquationis Radicem esse: Quòd si res alitèr se habeat, videbis tamen quòd omnes Termini, in quibus species indefinitè parva est paucarum Dimensionum, id est, omnes maximi Termini auferuntur à Columnâ istâ, ita ut denique, aut nulli restent in eâ, aut ii tantùm, qui assignatâ quâlibet Quantitate minores sunt, & idcirco nihilo non majores, ubi Opus in infinitum est protractum; ergo Quotiens extractus in infinitum est demum ipsissima Radix.

Denique, licèt species, quæ, perspicuïtatis gratiâ, fuerunt hactenùs suppositæ indefinitè parvæ, supponantur quantumvis magnæ, tamen Quotiens erit adhuc verus, quanquam non adeò celeriter ad veram Radicem convergat: Quod patet ex rerum Analogiâ. Sed hìc considerandi sunt Radicum Limites, aut maximæ & minimæ Quantitates; nam, harum proprietates communes sunt finitis & infinitis Æquationibus: In his Radix est maxima vel minima; cùm maxima aut minima est differentia, quæ intercedit inter Aggregata affirmativorum & negativorum Terminorum; limitata autem est, quando indefinita Quantitas, (quæ propterea non malè supponi potest

teſt perexigua,) major fieri nequit, quin Radicis magnitudo ſtatim evadat infinita, id eſt, impoſſibilis.

Ad huic argumento lucem affundendam ſit (*Fig.* 2.) ACD ſemicirculus deſcriptus ſupra Diametrum AD, & ſit BC ordinatim Applicata. Fac $AB = x$; $BC = y$; $AD = a$. Erit igitur $y = \sqrt{ax - xx} = \sqrt{ax} - \frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{xx}{8aa}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; &c., ut ſupra. Quapropter, tunc BC vel y evadit maxima, cùm $\sqrt{ax}$ maximo intervallo ſuperat omnes Terminos $+ \frac{x}{2a}\sqrt{ax} + \frac{xx}{8aa}\sqrt{ax} + \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; &c., id eſt, cùm $x = \frac{1}{2}a$; terminata autem eſt cùm $x = a$; ſi enim fingas x majorem quàm a, Summa omnium Terminorum $- \frac{x}{2a}\sqrt{ax} - \frac{xx}{8aa}\sqrt{ax} - \frac{x^3}{16a^3}\sqrt{ax}$; &c. in infinitum excreſcet; ſed etiam eſt alter Limes, cùm ſcilicet $x = 0$, ob impoſſibilitatem ipſius $\sqrt{-ax}$, quibus Terminis, ſive Limitibus reſpondent ſemicirculi Limites, ſive Termini. TAB. I.

TRANSITIO AD METHODUM FLUXIONUM.

Hactenùs de hâc computandi Methodo, cujus frequens erit uſus in ſequentibus. Nunc reſtat ut ad Artis analyticæ illuſtrationem proferam nonnulla Problematum ſpecimina, & præſertim eorum, quibus Curvarum natura magis in patulo poni poſſit. Sed antea obſervandum eſt, quòd, quidquid in iis arduum eſt, revocari poteſt ad duo ſequentia Problemata, quæ proponam de Spatio deſcripto per localem Motum, vel acceleratum, vel retardatum.

I.

Longitudine deſcripti ſpatii ſemper, (id eſt, quovis Temporis momento,) datâ, invenire Velocitatem Motûs Tempore propoſito.

II.

Velocitate Motûs semper datâ, invenire Longitudinem spatii descripti Tempore proposito.

Si, *exgr.*, in Æquatione $xx = y$ exponit y Longitudinem Spatii quodam momento Temporis percursi, quod Tempus mensuratur & descriptum exhibetur ab alio spatio x crescente juxta uniformem Celeritatem $\dot{x}$; exponet $2x\dot{x}$ Celeritatem, quâ Spatium y eodem Temporis momento progreditur ad ulteriorem sui descriptionem, & vice versâ. Hinc fit, ut in sequentibus considerem Quantitates tanquam genitas continuo Incremento, ut Spatium, quod Corpus aut quælibet res mota describit.

Cùm autem hìc Tempus tantùm considerandum veniat, tanquam expositum & mensuratum æquabili Motu locali, &, præterea, cùm solæ Quantitates ejusdem generis invicem comparari valeant, ut & Velocitates, quibus augentur aut minuuntur: Idcirco, in iis, quæ sequuntur, Tempus *formalitèr* non considero, sed suppono, quòd una ex propositis Quantitatibus homogenea cum aliis crescat æquabili Fluxu, ad quam ceteræ, tanquam ad Tempus, referantur, quæ ideò per Analogiam non inconcinnè dici potest *Tempus*. Quoties igitur vox *Tempus* in sequentibus invenietur, (eam autem sæpiusculè usurpavi perspicuitatis & distinctionis causâ,) hoc verbum sumendum est, non quasi Tempus intellexissem in suâ *formali* significatione, sed tanquam significans Quantitatem illam à Tempore diversam, cujus æquabili Incremento vel Fluxu Tempus exponitur & mensuratur.

Nunc in posterum *Fluentes* vocabo Quantitates has, quas considero tanquam gradatim & indefinitè crescentes, eásque repræsentabo per ultimas Alphabeti litteras u, y, x, & z, ut discerni possint ab aliis Quantitatibus, quæ in Æquationibus considerantur tanquam cognitæ & determinatæ; & quæ idcirco per primas Alphabeti litteras a, b, c; &c. exponuntur. At Velocitates, quibus singulæ Fluentes augentur per Motum generantem, (quas Velocitates appello *Fluxiones*, aut simplicitèr *Velocitates* vel *Celeritates*,) exprimuntur

tur iisdem litteris puncto auctis, sic $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$; id est, pro Celeritate Quantitatis u pono $\dot{u}$, & eodem pacto pro Celeritatibus aliarum Quantitatum x, y, & z scribam $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, respectivè.

His præmissis, statim argumentum inceptum tractare pergam; & primò quidem dabo Solutionem duorum nuper propositorum Problematum.

PROBL. I.

Datâ Relatione, quam invicem habent Fluentes Quantitates, determinare Relationem, quæ inter earum Fluxiones intercedit.

SOLUTIO.

Æquationem, quâ data Relatio exprimitur, dispone juxta Dimensiones alicujus ex Fluentibus Quantitatibus, quas includit, (puta, x,), & ejus Terminos multiplica per quancumque arithmeticam Progressionem, & deindè per $\frac{\dot{x}}{x}$: Hanc Operationem seorsum perfice pro quâvis Fluenti Quantitate; Tùm fac Aggregatum ex his omnibus Factis æquale nihilo, & habebis petitam Æquationem.

EXEMPL. I.

Si Relatio inter fluentes Quantitates x, & y exponitur Æquatione $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$. Primùm dispone Terminos secundùm x, deindè secundùm y, & eos multiplica, ut hìc vides factum.

$$\begin{array}{lcccc|ccc}
 & & & & & & & -axx \\
\text{Mult.} & x^3 & -axx & +axy & -y^3. & -y^3 & +axy & \\
 & & & & & & & +x^3 \\
\text{Per} & \frac{3\dot{x}}{x}; & \frac{2\dot{x}}{x}; & \frac{\dot{x}}{x}; & 0. & \frac{3\dot{y}}{y}; & \frac{\dot{y}}{y}; & 0 \\
\hline
\end{array}$$

Undè conficitur $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} * - 3yy\dot{x} + ax\dot{y} *$

Aggre-

Aggregatum ex Productis est $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3yy\dot{y} + ax\dot{y} = 0$; Quæ Æquatio monstrat quænam Relatio sit inter Fluxiones $\dot{x}$, & $\dot{y}$; nam, si assumas x ad libitum, Æquatio, $x^3 + axy - axx - y^3 = 0$, dabit y, quo determinato habebis $\dot{x} : \dot{y} :: 3yy - ax : 3xx - 2ax + ay$.

EXEMPL. II.

Relatio Quantitatum x, y, & z, exprimatur Æquatione $2y^3 + xxy - 2cyz + 3yzz - z^3 = 0$

Mult. $2y^3 \begin{matrix} +xxy \\ -2cz \\ +3zz \end{matrix} - z^3$	$yxx \begin{matrix} +2y^3 \\ -2cyz \\ +3yzz \\ -z^3 \end{matrix}$	$-z^3 + 3yzz - 2cyz \begin{matrix} +xxy \\ +2y^3 \end{matrix}$
Per $\frac{2\dot{y}}{y}$; 0; $-\frac{\dot{y}}{y}$	$\frac{2\dot{x}}{x}$; 0	$\frac{3\dot{z}}{z}$; $\frac{2\dot{z}}{z}$; $\frac{\dot{z}}{z}$; 0
Habebis $4yy\dot{y}$ * $+ \frac{z^3\dot{y}}{y}$	$2yx\dot{x}$ *	$-3zz\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z}$ *

Quapropter Relatio, quæ est inter Fluentium Celeritates aut Fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$ exponitur per $4yy\dot{y} + \frac{z^3\dot{y}}{y} + 2yx\dot{x} - 3zz\dot{z} + 6yz\dot{z} - 2cy\dot{z} = 0$.

Cùm autem in hoc secundo Exemplo tres sint fluentes Quantitates x, y, & z, habeatur, oportet, altera Æquatio, quâ prorsus determinari possit Relatio inter Fluentes x, y, & z, earúmque Fluxiones. Suppone, *ex. gr.*, quòd $x + y - z = 0$, hinc invenietur, per hanc Regulam, altera Relatio inter Fluxiones $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z} = 0$: Jam istam cum superiore Æquatione compara, exterminando aliquam ex tribus illis Quantitatibus & Fluxionibus; & indè exsurget Æquatio plenè determinans Relationem ceterarum.

Si quando proposita Æquatio continet Fractiones complexas, aut Quantitates surdas, pro iis litteras aliquas assumo, eásque repræsentare Quan-

Quantitates fluentes ſuppono, & procedo modo ſupra tradito: Deindè litteras aſſumtas ſupprimo & extermino, ut continuò factum videbis.

E x e m p l. III.

Relatio inter Quantitates x, & y, ſit $yy - aa - x\sqrt{aa - xx}$. Pro $x\sqrt{aa - xx}$ ſcribo z, & hinc duas habeo Æquationes $yy - aa - z = 0$, & $aaxx - x^4 - zz = 0$, quarum prima dat $2y\dot{y} - \dot{z} = 0$ ut ſupra, pro Relatione Celeritatum $\dot{y}$, & $\dot{z}$; altera verò $2aax\dot{x} - 4x^3\dot{x} - 2z\dot{z} = 0$, aut $\frac{aax\dot{x} - 2x^3\dot{x}}{z} = \dot{z}$, pro Relatione Celeritatum $\dot{x}$, & $\dot{z}$; nunc expulſâ $\dot{z}$, erit $2y\dot{y} - \frac{aax\dot{x}}{z} + \frac{2x^3\dot{x}}{z} = 0$, & reſtituendo $x\sqrt{aa - xx}$ pro z habebis $2y\dot{y} - \frac{aa\dot{x} + 2xx\dot{x}}{\sqrt{aa - xx}} = 0$ pro Relatione inter $\dot{y}$, & $\dot{x}$, quæ quærebatur.

E x e m p l. IV.

Si Æquatio $x^3 - ayy + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay + xx} = 0$ exponat Relationem, quæ eſt inter x, & y. Facio $\frac{by^3}{a+y} = z$, & $xx\sqrt{ay + xx} = u$, & obtineo tres Æquationes $x^3 - ayy + z - u = 0$; $az + yz - by^3 = 0$; & $ax^4y + x^6 - uu = 0$: Prima dat $3xx\dot{x} - 2ay\dot{y} + \dot{z} - \dot{u} = 0$; ſecunda $a\dot{z} + \dot{y}z + z\dot{y} - 3byy\dot{y} = 0$; ac tertia $4ayx^3\dot{x} + ax^4\dot{y} + 6x^5\dot{x} - 2u\dot{u} = 0$, pro Relationibus Velocitatum $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$; ſed valores ipſarum $\dot{u}$, & $\dot{z}$, inventos per ſecundam ac tertiam Æquationem (nempè $\frac{3byy\dot{y} - z\dot{y}}{a+y}$

 pro

pro $\dot{z}$; & $\frac{4ax^3y\dot{x}+ax^4\dot{y}+6x^5\dot{x}}{2u}$ pro $\dot{u}$,) ſubſtitue in Æquatione primâ, & fiet $3xx\dot{x}-2a\dot{y}y+\frac{3by\dot{y}y-\dot{z}y}{a+y}-\frac{4ayx^3\dot{x}-ax^4\dot{y}-6x^5\dot{x}}{2u}=0$: Jam, pro z, & u, repone earum valores $\frac{by^3}{a+y}$, & $xx\sqrt{ay+xx}$, & habebis petitam Æquationem $3xx\dot{x}-2ay\dot{y}+\frac{3aby\dot{y}y}{aa+2ay+yy}+\frac{2by^3\dot{y}}{aa+2ay+yy}-\frac{4ayx\dot{x}-6x^3\dot{x}-axx\dot{y}}{2\sqrt{ay+xx}}$,

quæ exprimet Relationem inter Velocitates $\dot{x}$ & $\dot{y}$.

Hinc, puto, manifeſtum eſt quomodo peragi poſſit Operatio in aliis caſibus, ut, cùm Æquatio propoſita implicatur ſurdis Denominatoribus, cubicis Radicalibus, Radicalibus intra Radicales ut $\sqrt{ax+\sqrt{aa-xx}}$, aut quibuſvis aliis complexis Terminis ejuſdem generis.

Quinimò, etiamſi propoſita Æquatio involvat Quantitates, quæ determinari & exprimi geometricè nequeunt, quales ſunt Areæ curvilineæ, aut Curvarum Longitudines, inveniri tamen poteſt Relatio, quæ eſt inter earum Fluxiones, ut ſequens Exemplum demonſtrabit.

PRÆPARATIO IN

EXEMPLUM V.

TAB. I. Sit (*Fig.* 3.) BD Ordinata ad rectos Angulos ipſi AB; & ADH ſit Curva, cujus natura definitur Relatione, quæ eſt inter AB, & BD, & Æquatione exprimitur. Vocentur AB quidem x, & Area Curvæ ABD ad Unitatem applicata z; Jam, ad rectos Angulos educ AC æqualem Unitati; & per C age CE parallelam ad AB, & ſecantem BD in E. Nunc intellige ambas haſce ſuperficies ADB, & ACEB, generari motu Rectæ BED, patet quòd earum Fluxiones, (Fluxiones nempe Quantitatum $1\times z$, & $1\times x$, aut Quantitatum

z, &c.

$\dot{z}$, & $\dot{x}$,) ſunt inter ſe ut Rectæ generantes BD, & BE; quocirca $\dot{z} : \dot{x} ::$ BD : BE, aut 1; & idcircò $\dot{z} = \dot{x} \times$ BD.

Hinc apparet, quòd z inveniri poteſt in Æquatione exprimente Relationem inter x & aliam fluentem Quantitatem y, & tamen Relatio Fluxionum $\dot{x}$ & $\dot{y}$ poteſt quomodocunque innoteſcere.

Exempl. V.

Proponatur, *ex. gr.*, Æquatio $zz + axz - y^4 = 0$, quæ exprimat Relationem inter x, & y; ac ſit $\sqrt{ax - xx} =$ BD, undè Curva determinetur, quæ idcirco erit Circulus; Æquatio $zz + axz - y^4 = 0$, dabit ex ſupra traditis $2\dot{z}z + a\dot{x}z + az\dot{x} - 4\dot{y}y^3 = 0$ pro Relatione Celeritatum $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$: Igitur, quia $\dot{z} = \dot{x} \times$ BD aut $= \dot{x}\sqrt{ax - xx}$, pro $\dot{z}$ pone hunc valorem, & inde conficietur hæc Æquatio $\overline{2z\dot{x} + ax\dot{x}} \times \sqrt{ax - xx} + az\dot{x} - 4y^3\dot{y} = 0$, quæ determinat Relationem Celeritatum $\dot{x}$, & $\dot{y}$.

Solutionis
Demonstratio.

Fluentium Quantitatum Momenta, (videlicet earum partes indefinitè parvæ, quarum acceſſione in indefinitè exiguis partibus Temporis Quantitates ipſæ jugitèr augentur,) ſunt ut Velocitates, quibus fluunt aut creſcunt.

Quapropter, ſi Momentum alicujus, (puta, x) repræſentatur Facto ex ejus Celeritate $\dot{x}$ in Quantitatem indefinitè parvam, (id eſt, $\dot{x}o$,) Momentum aliarum u, y, z repræſentandum erit per $\dot{u}o$, $\dot{y}o$, $\dot{z}o$, quia $\dot{u}o$, $\dot{x}o$, $\dot{y}o$, & $\dot{z}o$, invicem habent eandem Rationem, quam $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$.

Jam, quia Momenta, *ex. gr.*, $\dot{x}o$, & $\dot{y}o$, ſunt Incrementa in-

definitè parva, quibus fluentes Quantitates x, & y, augentur per indefinitè parva Temporis intervalla, ex eo sequitur has Quantitates x, & y, post indefinitè parva Temporis spatia evasisse $x + \dot{x}o$, & $y + \dot{y}o$. Æquatio verò, quæ quibuscumque Temporibus indiscriminatim exprimit Relationem fluentium Quantitatum, æquè bene exprimet Relationem, quæ intercedit inter $x + \dot{x}o$, & $y + \dot{y}o$, ac eam, quæ est inter x, & y, ita ut in eâdem Æquatione ponere liceat $x + \dot{x}o$, & $y + \dot{y}o$, pro x, & y.

Quamobrem, sit Æquatio $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, in eâ substitue $x + \dot{x}o$, & $y + \dot{y}o$, ipsis x, & y, obtinebis.

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + 3xx\dot{x}o + 3x\dot{x}o\dot{x}o + \dot{x}^3o^3 \\ - axx - 2ax\dot{x}o - a\dot{x}o\dot{x}o \\ + axy + ay\dot{x}o + a\dot{x}o\dot{y}o \\ + ax\dot{y}o \\ - y^3 - 3yy\dot{y}o - 3y\dot{y}o\dot{y}o - \dot{y}^3o^3 \end{array}\right\} = 0.$$

Sed, per hypothesim, est $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, expunge igitur hos Terminos, ceterósque divide per o & restabit $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} + 3x\dot{x}\dot{x}o - a\dot{x}\dot{x}o + a\dot{x}\dot{y}o - 3y\dot{y}\dot{y}o + \dot{x}^3oo - \dot{y}^3oo = 0$; Cùm autem finxerimus o Quantitatem infinitè parvam, ut exponere posset Quantitatum Momenta, Termini in eam ducti pro nihilo possunt haberi cum aliis collati; eos igitur negligo, & superest $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$, ut antea inveneramus in Exemplo I.

Hìc observandum venit, quòd semper evanescunt, cùm Termini qui per o multiplicati non sunt, tùm ii qui multiplicati sunt per o, duarum aut plurium Dimensionum; & quòd reliqui Termini divisi per o, semper acquirunt formam, quam habere debebant secundùm Regulam superiorem. Quòd erat ostendendum.

His

His autem demonſtratis, facilè ſequentur reliqua, quæ complectitur Regula, ut, quòd Æquatio eadem complecti poteſt plures fluentes Quantitates, & quòd Termini duci poſſunt non ſolùm in Indices fluentium Quantitatum, ſed etiam in quamcunque aliam Progreſſionem arithmeticam, ita ut in Operatione eadem ſit differentia Terminorum juxta ſingulas fluentes Quantitates, & Progreſſio diſponatur ſecundùm ordinem Dimenſionum uniuſcujuſque Fluentis. His conceſſis, quæ præterea docentur in Exemplis III., IV., & V., ſatis per ſemet ipſa patebunt.

P R O B L. II.

Datâ Æquatione, quæ contineat Quantitatum Fluxiones, invenire quam Relationem habeant inter ſe hæ Quantitates Fluentes.

S O L U T I O   P E C U L I A R I S.

Cùm hoc Problema ſit ſuperioris converſum, reſolvi debet per Operationes contrarias; ſcilicet, Termini ducti in $\dot{x}$ diſponi debent juxta Dimenſiones x, & dividi per $\frac{\dot{x}}{x}$, & deindè per Numeros Dimenſionum eorum, aut fortaſſe per aliquam aliam Progreſſionem arithmeticam: Tùm, eâdem operâ repetitâ pro Terminis multiplicatis per $\dot{u}$, $\dot{y}$, vel $\dot{z}$, Aggregatum ſic emergens poni debet æquale nihilo, rejectis Terminis ſupervacuis.

E X E M P L U M.

Proponatur Æquatio $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} - 3yy\dot{y} + ax\dot{y} = 0$, Operatio fiet, ut hìc vides.

Divide $3x\dot{x}x - 2ax\dot{x} + ay\dot{x}$ Per $\frac{\dot{x}}{x}$	Divide $-3y\dot{y}y \ * + ax\dot{y}$ Per $\frac{\dot{y}}{y}$
Quotiens est $3x^3 - 2axx + ayx$, quem divide per 3; 2; 1	Quotiens est $-3y^3 * + axy$, quem divide per 3; 2; 1
Quotiens est $x^3 - axx + axy$	Quotiens est $-y^3 * + axy$

Igitur Aggregatum $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, exprimet petitam Relationem Quantitatum x, & y.

Hìc animadvertendum est, quòd etiamsi Terminus axy bis occurrat, illum tamen bis non adscribo Summæ $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$, sed alterum rejicio ut Terminum redundantem. Eodem pacto, si quando Terminus aliquis bis recurrit, (aut pluriès, si quando idem Terminus complectitur diversas Quantitates fluentes,) semèl scribi debet in Terminorum summâ.

Alia, quæ fuissent observanda, permittam solertiæ Artificis; nam supervacaneum esset nimis diu in hoc argumento hærere: siquidem hoc pacto Problema non semper solvi potest. Unum tamen addam, videlicet, quòd si, postquam Fluentium Relationem inveneris hâc Methodo, regredi potes per Probl. I. ad propositam Æquationem Fluentes involventem, certò noscis Opus esse rectum, aliàs non. Sic in Exemplo proposito, si ex inventâ Æquatione $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$ quæro, per primum Problema, Relationem Fluxionum $\dot{x}$, & $\dot{y}$, pervenio ad propositam Æquationem $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$; undè constat Æquationem $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$ eam esse quam petebamus. Sed, propositâ Æquatione $x\dot{x} - \dot{y}x + a\dot{y} = 0$, Methodus præscripta præbet $\frac{1}{2}xx - yx + ay = 0$, Æquationem, quæ exponere deberet Relationem inter x, & y; sed quæ ad hoc inepta est, quia hinc, per Probl. I., excuditur $x\dot{x} - y\dot{x} - x\dot{y} + a\dot{y} = 0$, quæ Æquatio differt à propositâ.

His autem perfunctoriè præmissis aggredior generalem solutionem.

PRÆ-

PRÆPARATIO IN SOLUTIONEM.

Principio animadvertendum eſt, quòd in propoſitâ Æquatione ſymbola Fluxionum, (ſunt enim Quantitates diverſi generis ab iis, quarum Fluxiones ſunt,) in ſingulis Terminis aſcendere debent ad æquè altas Dimenſiones: ſi quando autem res aliter ſe habet, aſſumenda pro Unitate eſt aliqua Fluxio cujuſvis fluentis Quantitatis, & per eam Termini minùs alti ſunt multiplicandi totiès quotiès opus eſt, ut ſymbola Fluxionum perveniant ad eundem Dimenſionum numerum in omnibus Terminis.

Sit, *ex. gr.*, Æquatio $\dot{x} + \dot{x}\dot{x}y - axx = 0$, pro Unitate accipienda eſt Fluxio $\dot{z}$ tertiæ cujuſlibet Quantitatis fluentis z, & per eam primus Terminus $\dot{x}$ ſemèl, ultimus autem axx bis multiplicati concipiendi ſunt; ut Fluxiones in iis ad tot Dimenſiones aſcendant, ad quot in ſecundo Termino $\dot{x}\dot{x}y$; non ſecus, ac ſi propoſita Æquatio deducta fuiſſet ab hâc $\dot{x}\dot{z} + \dot{x}\dot{x}y - axx\dot{z}\dot{z} = 0$, fingendo $\dot{z} = 1$. Haud alitèr in Æquatione $\dot{x}y = \dot{y}y$, concipi debet $\dot{x}$ eſſe Unitatem, per quam Terminus yy multiplicandus eſt.

Jam Æquationes, quæ ſolùm duas fluentes Quantitates complectuntur, & eæ pari Dimenſionum numero ubique gaudent, ſemper ita diſponi poſſunt, ut ad unam partem ſit Ratio Fluxionum, (puta, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, aut $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, vel $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, &c.), & ad aliam valor hujus Rationis expreſſus ſimplici Termino algebraïco, ut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2 + 2x - y$.

Et, cùm peculiaris ſupra tradita Solutio adhiberi nequit, ſemper Æquationes hâc formâ donandæ ſunt.

Quapropter, ſi quando in Rationis hujus valore aliquis Terminus im-

implicatus eſt Denominatore complexo aut radicali Signo, aut ſi quando Ratio ipſa eſt Radix affectæ Æquationis, antequam Opus aggrediare, debes Reductionem facere, ſive per Diviſionem ſive per Radicis extractionem ſive per Æquationis affectæ Reſolutionem, ut ſupra docuimus.

Proponatur, *ex. gr.*, Æquatio $a\dot{y} - x\dot{y} - a\dot{x} + x\dot{x} - y\dot{x} = 0$, primùm per Reductionem ea fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a-x}$, aut $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{a-x}{a-x+y}$.

In prima hypotheſi, redigo Terminum $\frac{y}{a-x}$, cujus Denominator eſt compoſita Quantitas $a - x$, ad infinitam ſimplicium Terminorum Seriem $\frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{xxy}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$; &c., (quæ Reductio fit dividendo Numeratorem y per Denominatorem $a - x$,) unde excudo $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{xxy}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$; &c., cujus ope determinanda eſt Relatio inter x & y.

Eodem pacto, ſi daretur Æquatio $\dot{y}\dot{y} = \dot{x}\dot{y} + xx\dot{x}\dot{x}$, aut $\frac{\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{x}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} + xx$, aut, per ulteriorem Reductionem, $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ extraherem quadratam Radicem Terminorum $\frac{1}{4} + xx$, & obtinerem Seriem infinitam $\frac{1}{2} + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$; &c., quam ſi ſubſtituerem pro $\pm\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$, haberem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + xx - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10}$; &c., aut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -xx + x^4 - 2x^6 + 5x^8 - 14x^{10}$; &c., prout $\sqrt{\frac{1}{4} + xx}$ additur ipſi $\frac{1}{2}$, vel ab eo ſubtrahitur.

Haud

Haud secus, propositâ Æquatione $\dot{y}^3 + ax\dot{x}\dot{x}\dot{y} + aa\dot{x}\dot{x}\dot{y} - x^3\dot{x}^3 - 2a^3\dot{x}^3 = 0$, aut $\frac{\dot{y}^3}{\dot{x}^3} + ax\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + aa\frac{\dot{y}}{\dot{x}} - x^3 - 2a^3 = 0$; extraho Radicem cubicæ Æquationis affectæ, undè fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$; &c., ut jam inveneramus.

Hìc autem observandum est, quòd in compositorum censum refero solùm Terminos illos, qui compositi sunt respectu fluentium Quantitatum. Simplices enim reputo Quantitates, quæ compositæ sunt tantùm quoad Quantitates datas; quia reduci possunt ad Quantitates simplices, ponendo eas æquales alicui datæ Quantitati. Quapropter Quantitates $\frac{ax+bx}{c}$; $\frac{x}{a+b}$; $\frac{bcc}{ax+bx}$; $\frac{b^4}{axx+bxx}$; $\sqrt{ax+bx}$; &c., mihi simplices sunt, quia omnes reducere possum ad Quantitates simplices $\frac{ex}{c}$; $\frac{x}{e}$; $\frac{bcc}{ex}$; $\frac{b^4}{exx}$; $\sqrt{ex}$; (vel $e^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}$,) supponendo $a+b=e$.

Præterea, quò faciliùs una ex fluentibus Quantitatibus ab aliâ distingui possit, Fluxionem eam, quæ in Rationis Numeratore est, non impropriè vocari potest *Relata Quantitas*; ea verò, quæ est in Denominatore & cui prior comparatur, *Correlata*: Quin etiam Quantitates ipsæ fluentes iisdem respectivè Nominibus insigniri possunt. Et, ut sequentia meliùs intelligantur, concipere licet *Correlatam* Quantitatem esse Tempus, aut quamlibet aliam Quantitatem æquabiliter fluentem, per quam Tempus exponitur & mensuratur: Aliam verò, *Relatam* scilicet Quantitatem, esse spatium Tempore illo descriptum à re, vel Puncto gaudente Motu sive accelerato sive retardato; ac Problematis sensum esse, quòd Velocitate Motûs datâ ad quodcumque Temporis momentum, spatium descriptum per totum Tempus est determinandum.

Æquationes autem, quæ ad hoc Problema pertinent, ad tres Ordines revocari possunt.

Primus continet eas, in quibus inveniuntur duæ Quantitatum Fluxiones, & altera folùm ex earum Fluentibus.

Secundus illas quæ duas involvunt fluentes Quantitates, fimùl cùm earum Fluxionibus.

Tertius denique eas in quibus funt Fluxiones plurium quàm duarum Quantitatum.

Quibus præmiffis, tranfeo ad folutionem trium horum Problematis cafuum.

SOLUTIO CASUS I.

Statue fluentem Quantitatem, quæ unica eft in Æquatione, effe *Correlatam*, & Æquatione huic hypothefi aptatâ, (ponendo fcilicet hinc folam Rationem, quam habet Fluxio alterius Quantitatis ad hujus Fluxionem, & inde valorem hujus Rationis in fimplicibus Terminis,) multiplica valorem Rationis, quæ inter Fluxiones intercedit, per *Correlatam* Quantitatem; deindè divide fingulos hujus valoris Terminos per numerum Dimenfionum, ad quas elevata eft Quantitas ipfa *Correlata*, & id, quod fic affequeris, æquivalet alteri fluenti Quantitati.

Sic, propofitâ Æquatione $\dot{y}y = \dot{x}y + \dot{x}xxx$, fuppono quòd x fit *Correlata* Quantitas, &, factâ Æquationis Reductione accomodatâ huic hypothefi, reperio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + xx - x^4 + 2x^6$; &c. Jam multiplico valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ per x, undè affequor $x + x^3 - x^5 + 2x^7$; &c.; quos Terminos fingulos divido per numerum Dimenfionum, quibus afficiuntur, & inde conficitur $x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7$; &c., quam Quantitatem pono $= y$, & hâc Æquatione definietur Relatio inter x, & y. Quod petebatur.

Paritèr, fit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$; &c., hinc habebis

habebis $y = a\dot{x} - \frac{xx}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048aa}$; &c., Æquationem, quæ determinat Relationem ipſarum x, & y.

Item, Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{xx} + \frac{a}{x^{\frac{1}{2}}} - x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}}$; dat $y = -\frac{1}{2xx} + \frac{1}{x} + 2ax^{\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$; nam, duc valorem $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ in x, fiet $+\frac{1}{xx} - \frac{1}{x} + ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$, aut x^{-2}, $-x^{-1} + ax^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{5}{2}}$; quibus Terminis diviſis per numerum Dimenſionum, orietur valor y, ille idem, quem ſupra invenimus.

Haud ſecùs, ex Æquatione $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{2bbc}{\sqrt{ay^3}} + \frac{3yy}{a+b} + \sqrt{by+cy}$, aſſequor $x = -\frac{4bbc}{\sqrt{ay}} + \frac{y^3}{a+b} + \frac{2}{3}\sqrt{by^3+cy^3}$; quia valor ipſius $\frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ multiplicatus per y, gignit $\frac{2bbc}{\sqrt{ay}} + \frac{3y^3}{a+b} + \sqrt{by^3+cy^3}$; aut $2bbca^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{a+b}y^3 + \sqrt{b+c} \times y^{\frac{3}{2}}$; undè conficitur valor x, dividendo per numerum Dimenſionum cujuſque Termini.

Eodem pacto $\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = z^{\frac{2}{3}}$ dat $y = \frac{3}{5}z^{\frac{5}{3}}$; & $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ab}{cx^{\frac{1}{3}}}$ præbet $y = \frac{3abx^{\frac{2}{3}}}{2c}$. Sed Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{a}{x}$ dat $y = \frac{a}{0}$; nam, ſi $\frac{a}{x}$ multiplicetur per x conficitur a, & ſi a dividatur per numerum Dimenſionum x, videlicet per o, habetur $\frac{a}{o}$, quæ Quantitas infinita debet eſſe valor y.

Quapropter, ſi quando Terminus huic ſimilis occurrit in valore

 ipſius

ipsius $\frac{\dot{y}}{x}$, id est, Fractio, cujus Denominator involvit *Correlatam* Quantitatem unius Dimensionis, ipsi *Correlatæ* Quantitati substitue aggregatum ex eâ & quâcumque datâ ad libitum assumendâ, vel earum differentiam: Hoc enim pacto servabitur in Æquatione sic efficta Relatio, quæ erat in Æquatione primò propositâ, & infinita *Relata* Quantitas minuetur infinitâ suimet parte, & finita fiet, expressa tamen Terminis numero infinitis.

Quocirca, propositâ Æquatione $\frac{\dot{y}}{x} = \frac{a}{x}$; si pro x scribis $b+x$, Quantitate b ad libitum assumptâ, reperies $\frac{\dot{y}}{x} = \frac{a}{b+x}$, & per Divisionem $\frac{\dot{y}}{x} = \frac{a}{b} - \frac{ax}{bb} + \frac{axx}{b^3} - \frac{ax^3}{b^4}$; &c. Nunc autem Regula nuper tradita dat $y = \frac{ax}{b} - \frac{axx}{2bb} + \frac{ax^3}{3b^3} - \frac{ax^4}{4b^4}$; &c., ad exponendam Relationem, quæ est inter x, & y.

Itidem, si habeas Æquationem $\frac{\dot{y}}{x} = \frac{2}{x} + 3 - xx$, si, (quia adest Terminus $\frac{2}{x}$,) scribas $1+x$ pro x, orietur $\frac{\dot{y}}{x} = \frac{2}{1+x} + 2 - 2x - xx$. Jam, reducendo $\frac{2}{1+x}$ in infinitam Seriem $2 - 2x + 2xx - 2x^3 + 2x^4$; &c., consequeris $\frac{\dot{y}}{x} = 4 - 4x + xx - 2x^3 + 2x^4$; &c.; &, juxta Regulam, $y = 4x - 2xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{5}x^5$; &c., pro Relatione x, & y.

Eâdem ratione, propositâ Æquatione $\frac{\dot{y}}{x} = x^{-\frac{1}{2}} + x^{-1} - x^{\frac{1}{2}}$;

quia

quia in eâ video Terminum x^{-1}, (vel $\frac{1}{x}$,) transmuto x ponendo $1 - x$ pro eo, undè fit $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1-x} - \sqrt{1-x}$. Jam verò Terminus $\frac{1}{1-x}$ producit $1 + x + xx + x^3$; &c., ac Terminus $\sqrt{1-x}$ æquivalet $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}xx - \frac{1}{16}x^3$; &c., & idcirco $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, aut $\frac{1}{1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}xx - \frac{1}{16}x^3;\ \&c.}$, idem eſt ac $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}xx + \frac{5}{8}x^3$; &c. : His ergo valoribus ſubſtitutis, obtinebis $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + 2x + \frac{3}{2}xx + \frac{27}{16}x^3$; &c., ac, per Regulam, $y = x + xx + \frac{1}{2}x^3 + \frac{27}{64}x^4$; &c.; atque ita porrò.

Quin etiam in aliis caſibus, aliquando concinniori formâ donantur Æquationes, ſimili fluentis Quantitatis tranſmutatione; ut, ſi proponeretur Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{ccx}{c^3 - 3ccx + 3cxx - x^3}$, pro x ſcribo $c - x$, & aſſequor $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{c^3 - ccx}{x^3}$, aut $\frac{c^3}{x^3} - \frac{cc}{xx}$, & hinc, per Regulam, $y = -\frac{c^3}{2xx} + \frac{cc}{x}$; ſed harum tranſmutationum uſus magis patebit ex ſequentibus.

SOLUTIO CASUS II.

PRÆPARATIO.

Hactenus de Æquationibus, quæ unam involvunt Fluentem: Sed quando ambæ apparent in Æquatione, Æquatio illa primùm reducenda eſt ad præſcriptam formam, ponendo hinc Fluxionum Ra-

 tionem,

tionem, inde Aggregatum ex ſimplicibus Terminis, cui Fluxionum Ratio æqualis eſt.

Et, præterea, ſi quis Æquationis ita reductæ Terminus eſt Fractio denominata à Quantitate fluente, hic liberari debet à tali Denominatore per ſupra memoratam fluentis Quantitatis tranſmutationem.

Hoc pacto, propoſitâ Æquatione $a x \dot{y} - x y \dot{x} - a a \dot{x} = 0$, vel $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{x}$, ob Terminum $\frac{a}{x}$ aſſumo b ad libitum, & pro x ſcribo $b + x$ ſive $b - x$, aut $x - b$: ſi ſcriberem $b + x$, fieret $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b + x}$. Tunc autem Termino $\frac{a}{b + x}$ in Seriem infinitam per Diviſionem diducto, aſſequerer $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{a} + \frac{a}{b} - \frac{ax}{bb} + \frac{axx}{b^3} - \frac{ax^4}{b^4}$; &c.

Haud aliter, Æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 3y - 2x + \frac{x}{y} - \frac{2y}{xx}$ propoſitâ, ſi propter Terminos $\frac{x}{y}$ & $\frac{2y}{xx}$ ſcriberem $1 - y$ pro y; & $1 - x$ pro x, oriretur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3y + 2x + \frac{1 - x}{1 - y} + \frac{2y - 2}{1 - 2x + xx}$. Atqui Terminus $\frac{1 - x}{1 - y}$, per Diviſionem in infinitum, dat $1 - x + y - xy + yy - xyy + y^3 - xy^3$; &c., ac Terminus $\frac{2y - 2}{1 - 2x + xx}$, per ſimilem Diviſionem, præbet $2y - 2 + 4xy - 4x + 6xxy - 6xx + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$; &c.: Igitur $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3$; &c., $+ 6xxy - 6xx + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$; &c.

REGU-

R E G U L A.

Æquatione ſic præparatâ, (quatenus opus eſt,) diſpone Terminos juxta Dimenſiones fluentium Quantitatum, primò ponens eos, qui *Relatâ* Quantitate non ſunt affecti, deindè eos, qui minimâ ejus Dimenſione ſunt implicati, & ſic deinceps. Eodem pacto in ſingulos ordines diſtribue Terminos juxta Dimenſiones *Correlatæ* Quantitatis, eóſque, qui primum ordinem conſtituunt, (qui nempe ſunt immunes à *Relatâ* Quantitate,) ſcribe, ita ut faciant lateralem Seriem à ſiniſtrâ dextram versùs, & reliquos, ita ut componant Seriem deſcendentem in ſiniſtrâ Columnâ, ut indicant ſubjectæ Tabellæ: Quibus ita præparatis, multiplica primum aut infimum Terminum prioris ordinis per *Correlatam* Quantitatem, & divide Productum per numerum ſuarum Dimenſionum, & quod hinc fit pone in Quotiente; erit enim primus Terminus valoris *Relatæ* Quantitatis: Tunc illum ſubſtitue in Terminis Æquationis, quæ jam poſita fuerat in ſiniſtrâ Columnâ pro *Relatâ* Quantitate, & ex Termino, qui tunc infimus erit, obtinebis ſecundum Quotientis Terminum eâdem ratione, quâ priorem aſſecutus fueras. Et hâc Operatione repetitâ Quotientem produces quoùſque volueris. Sed hoc magis perſpicuum fiet uno aut altero Exemplo.

E X E M P L. I.

Sit Æquatio $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + xx + xy$, cujus Terminos $1 - 3x + xx$ non affectos *Relatâ* Quantitate diſpoſitos vides in lateralem Seriem primo loco, & reliquos y & xy in ſiniſtrâ Columnâ.

	$+1 - 3x + xx$
$+y$	$* + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$; &c.
$+xy$	$* \quad x + xx - x^3 + \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{30}x^6$; &c.
Aggreg.	$+1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{4}{30}x^5$; &c.
$y =$	$+x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$; &c.

Nunc

Nunc priùs multiplico primum Terminum 1 in *Correlatam* Quantitatem x, undè conficitur x, quam Quantitatem divisam per Dimensionum numerum 1 colloco in Quotiente inferiùs scripto. Deindè, substituendo hunc Terminum pro y in Terminis margini appositis $+y$, & $+xy$, reperio $+x$, & $+xx$, quos scribo è conspectu ipsorum $+y$, & $+xy$, dextram versùs. Jam è reliquis segrego Terminos infimos $-3x$, & $+x$ quorum summa $-2x$ ducta in x evadit $-2xx$, & divisa per Dimensionum numerum 2 fit $-xx$, & hic Terminus secundus est valoris y Quotienti adscribendus. Postea sumo pariter hunc Terminum ad perficiendum valorem marginalium Terminorum $+y$, & $+xy$, undè assequor $-xx$, & $-x^3$, Terminos addendos ipsis $+x$, & $+xx$ jam adscriptis. Quo facto, rursus excerpo Terminos, qui nunc sunt infimi $+xx$, $-xx$, & $+xx$, quos in unum $+xx$ colligo, & indè educo $+\frac{1}{3}x^3$, (agendo ut antea,) tertium Terminum addendum valori ipsius y. Iterùm, posito hoc Termino $+\frac{1}{3}x^3$ in Terminorum marginalium valore, ex Terminis jam infimis $+\frac{1}{3}x^3$ & $-x^3$ simùl additis obtineo $-\frac{1}{6}x^4$ pro quarto Termino valoris y. Et sic in infinitum.

Exempl. II.

Eodem pacto, si determinanda foret Relatio x, & y, ex Æquatione $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 + \frac{y}{a} + \frac{xy}{aa} + \frac{xxy}{a^3} + \frac{x^3y}{a^4}$; &c., quæ Series supponitur progredi in infinitum, pono 1 in altissimo loco, & Terminos reliquos in sinistrâ Columnâ, & persequor Opus ut videtur in apposito Diagrammate.

$+1$

	$+1.$
$+\frac{y}{a}$	$* + \frac{x}{a} + \frac{xx}{2aa} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$; &c.
$+\frac{xy}{aa}$	$* \quad * + \frac{xx}{aa} + \frac{x^3}{2a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$; &c.
$+\frac{xxy}{a^3}$	$* \quad * \quad * + \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^4}{2a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$; &c.
$+\frac{x^3y}{a^4}$	$* \quad * \quad * \quad * + \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^5}{2a^5}$; &c.
$+\frac{x^4y}{a^5}$	$* \quad * \quad * \quad * \quad * + \frac{x^5}{a^5}$; &c.
&c.	
Aggregat.	$1 + \frac{x}{a} + \frac{3xx}{2aa} + \frac{2x^3}{a^3} + \frac{5x^4}{2a^4} + \frac{3x^5}{a^5}$; &c.
$y =$	$x + \frac{xx}{2a} + \frac{x^3}{2aa} + \frac{x^4}{2a^3} + \frac{x^5}{2a^4} + \frac{x^6}{2a^5}$; &c.

Propositum, puta, mihi fuerat extrahere valorem ipsius y tantùm usque ad sextam Dimensionem x; eâ de causâ inter operandum omitto omnes eos Terminos, quos ad rem non facturos prævideo, ut indicatur signo &c., quod subjunxi Seriebus intercisis.

Exempl. III.

Haud aliter, si proponeretur Æquatio $\frac{\dot{y}}{x} = -3x + 3xy + yy - xyy + y^3 - xy^3 + y^4 - xy^4$; &c. $+ 6xxy - 6xx + 8x^3y - 8x^3 + 10x^4y - 10x^4$; &c., &, si producenda esset extractio valoris ipsius y, donec x ad septimam Dimensionem ascenderet, Terminos ordine disponerem, ut factum est in subjectâ Tabellâ, & Opus instituerem more solito, nisi quod, quia in sinistrâ Columnâ y invenitur non solùm unius sed duarum Dimensionum vel trium (vel etiam plusquàm trium, si quis producere vellet valorem y ultra septimam Dimensionem ipsius x,) subdo secundam & ter-

 tiam

tiam Poteſtatem y gradatim protractas, quòuſque opus eſt, ut eæ, poſtquam poſitæ fuerint gradatim dexteram verſùs pro marginalium valore, ſaltem dent Terminos tot Dimenſionum, quot ad Operationem ſequentem requiri perſpicio.

	$-3x$	$-6xx$	$-8x^3$	$-10x^4$	$-12x^5$	$-14x^6$; &c.
$+3xy$	*	*	$-\frac{9}{2}x^3$	$-6x^4$	$-\frac{75}{8}x^5$	$-\frac{273}{20}x^6$; &c.
$+6xxy$	*	*	*	$-9x^4$	$-12x^5$	$-\frac{75}{4}x^6$; &c.
$+8x^3y$	*	*	*	*	$-12x^5$	$-16x^6$; &c.
$+10x^4y$	*	*	*	*	*	$-15x^6$; &c.
&c.						
$+yy$	*	*	*	$+\frac{9}{4}x^4$	$+6x^5$	$+\frac{107}{8}x^6$; &c.
$-xyy$	*	*	*	*	$-\frac{9}{4}x^5$	$-6x^6$; &c.
&c.						
$+y^3$	*	*	*	*	*	$-\frac{27}{8}x^6$; &c.
Aggregat.	$-3x$	$-6xx$	$-\frac{25}{2}x^3$	$-\frac{91}{4}x^4$	$-\frac{333}{8}x^5$	$-\frac{367}{5}x^6$; &c.

$$y = -\frac{3}{2}xx - 2x^3 - \frac{25}{8}x^4 - \frac{91}{20}x^5 - \frac{111}{16}x^6 - \frac{367}{35}x^7;\ \&c.$$

$$yy = +\frac{9}{4}x^4 + 6x^5 + \frac{107}{8}x^6;\ \&c.$$

$$y^3 = -\frac{27}{8}x^6;\ \&c.$$

Et hâc Methodo reperio demum $y = -\frac{3}{2}xx -$; &c. quæ eſt Æquatio petita; Sed, quia valor hic negativus eſt, apparet, quòd una

una ex Quantitatibus x, & y, decreſcit cùm altera creſcit. Idem dicendum eſt, quando una ex Fluxionibus affirmativa eſt, altera verò negativa.

E X E M P L. IV.

Eâdem ratione poteſt Æquatio reſolvi, etiamſi Relata Quantitas affecta ſit Dimenſionibus fractis: Ut, ſi proponeretur indagandus valor x ex Æquatione $\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{1}{2}y - 4yy + 2yx^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}xx + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$, in quâ eſt Terminus $2yx^{\frac{1}{2}}$, (aut $2y\sqrt{x}$,) affectus fractâ Dimenſione $\frac{1}{2}$.

	$+\frac{1}{2}y \ * \ -4yy + 7y^{\frac{5}{2}} + 2y^3$
$+2yx^{\frac{1}{2}}$	$* \ * \ + yy \ * \ -2y^3 + 4y^{\frac{7}{2}} - 2y^4$; &c.
$-\frac{4}{5}xx$	$* \ * \ * \ * \ * \ * \ -\frac{1}{20}y^4$; &c.
Aggreg.	$+\frac{1}{2}y \ * \ -3yy + 7y^{\frac{5}{2}} \ * \ + 4y^{\frac{7}{2}} - \frac{41}{20}y^4$; &c.
$x = +\frac{1}{4}yy - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} \ * \ + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} + \frac{41}{100}y^5$; &c.	
$x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}y - yy + 2y^{\frac{5}{2}} - y^3$; &c.	
$xx = +\frac{1}{16}y^4$; &c.	

Ex valore ipſius x gradatim deduco valorem $x^{\frac{1}{2}}$, (quod fit extrahendo Radicem quadratam,) ut videre potes in inferiore Diagrammatis parte, qui valor gradatim transferri & inſeri poteſt in valore marginalis Termini $2yx^{\frac{1}{2}}$. Et hoc pacto tandem habebo Æquationem $x = \frac{1}{4}yy - y^3 + 2y^{\frac{7}{2}} + \frac{8}{9}y^{\frac{9}{2}} - \frac{41}{100}y^5$; &c., quâ x relativè ad y indefinitè exprimitur. Et ſic rem peragere potes in ceteris caſibus quibuſlibet.

 Suprà

Suprà asserui, quòd hæ Solutiones perfici possunt infinitis modis. Hoc facies assumendo ad libitum non solùm primam Quantitatem prioris Seriei, sed quamcumque aliam Quantitatem pro primo Quotientis Termino, & deindè procedendo ut antea. Sic, si in priori ex præcedentibus Exemplis, accipis 1 tanquam primum Terminum valoris y, & substituis 1 pro y in marginalibus Terminis $+y$, & $+xy$, ac prosequeris Operationem ut priùs, (cujus rei tentamen hìc attuli,) orietur alter valor y, nem-

	$+1-3x+xx$
$+y$	$+1+2x \quad * +x^3+\frac{1}{4}x^4$; &c.
$+xy$	$* +x+2xx \quad * +x^4$; &c.
Aggreg.	$+2 \quad * +3xx+x^3+\frac{5}{4}x^4$; &c.
$y=1+2x \quad * +x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}x^5$; &c.	

pe $1+2x+x^3+\frac{1}{4}x^4$; &c. Item alter & alter orietur ex hypothesi, quòd 2, vel 3, aut quivis alius Numerus sit primus Quotientis Terminus: Vel, si aliquod symbolum, (puta, a,) adhibes ad repræsentandum indeterminatè primum Terminum, eâdem Operatione, (quam hìc apposui,) invenies $y=a+x+ax-xx+axx+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}ax^3$; &c., in quâ pro a pone 1, 2, 0, $\frac{1}{2}$, aut quemcumque Numerum, assecuturus infinitis modis Relationem inter x, & y.

+ 1

	$+ 1 - 3x + xx$
$+y$	$+ a + x - xx + \frac{1}{3}x^3$; &c.
	$+ ax + axx + \frac{2}{3}ax^3$; &c.
$+xy$	$* + ax + xx - x^3$; &c.
	$+ axx + ax^3$; &c.
Aggreg.	$+ 1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3$; &c.
	$+ a + 2ax + 2axx + \frac{5}{3}ax^3$; &c.

$$y = a + x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4;\ \&c.$$
$$+ ax + axx + \frac{2}{3}ax^3 + \frac{5}{12}ax^4;\ \&c.$$

Obſervandum eſt, quòd, quando Quantitas extrahenda afficitur fractâ Dimenſione, (ut in quarto ex ſuperioribus Exemplis,) benè ſumetur Unitas, vel quivis alius commodus Numerus pro primo Termino; Et hoc quidem neceſſariò faciendum eſt, quando ad obtinendum valorem hujus fractæ Dimenſionis, Radix aliter extrahi nequit ob negativum ſignum; & etiam, quando nulli ſunt Termini, qui diſponi poſſint in primâ vel capitali Serie, unde primus hìc Terminus deducitur.

Sic demum ad finem perduxi hoc valde intricatum & omnium aliorum difficillimum Problema, quando duæ ſolùm ſunt fluentes Quantitates unà cum Fluxionibus ſuis in propoſitâ Æquatione. Sed, præter generalem hanc Methodum, quæ ſe extendit ad omnes difficultates, aliæ ſunt plerumque breviores, quibus Opus facilius ſæpè reddi poteſt, & Lectori rem non injucundam faciam, ſiquod earum ſpecimen hìc ex abundanti referam.

I.

Cùm Quantitas resolvenda habet alicubi negativas Dimensiones, omninò necessarium non est priùs Æquationem aliâ formâ donare. Proponatur, *ex. gr.*, $\dot{y} = \frac{1}{y} - xx$, Æquatio in quâ y habet negativam Dimensionem; eam quidem convertere possum in aliam formam, *ex. gr.*, scribendo $1 + y$ pro y; Sed citiùs expedietur Resolutio Methodo, quam in suppositâ Tabellâ habes.

	$* \quad * - xx$
$\frac{1}{y}$	$1 - x + \frac{3}{2}xx$; &c.
Aggregat.	$1 - x + \frac{1}{2}xx$; &c.
	$y = 1 + x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3$; &c.
	$\frac{1}{y} = 1 - x + \frac{3}{2}xx$; &c.

Hîc assumpsi Unitatem pro primo Termino valoris y, reliquos Terminos excudi ut antea; & interim hinc eduxi per partes (dividendo) valorem ipsius $\frac{1}{y}$, quem posui in valore Termini marginalis.

II.

Necessariò paritèr non requiritur, ut Dimensiones alterius fluentis Quantitatis semper affirmativæ sint. Nam, ex Æquatione $\dot{y} = 3 + 2y - \frac{yy}{x}$, sine præscriptâ Termini $\frac{yy}{x}$ Reductione obtineri potest $y = 3x - \frac{3}{2}xx + 2x^3$; &c. Et ex Æquatione $\dot{y} = -y + \frac{1}{x} - \frac{1}{xx}$, haberi potest $y = \frac{1}{x}$ pro valore ipsius y, si Operatio dirigatur juxta sequens specimen.

	$-\frac{1}{xx}+\frac{1}{x}$
$-y$	$* - \frac{1}{x}$
Aggregat.	$-\frac{1}{xx} \quad 0$
$y=\frac{1}{x}$	

Hìc obiter animadvertendum eſt, quòd inter infinitas Solutiones, quibus Æquatio poteſt enodari, ſæpe ſæpius aliqua eſt, quæ perducit ad finitum Quantitatis quæſitæ valorem, ut in ſuperiori Exemplo. Hæ autem Solutiones non difficulter reperiuntur, ſumpto aliquo ſymbolo pro primo Termino; nam, Solutione peractâ dari poteſt huic ſymbolo valor aliquis, qui totam Seriem finitam reddat.

III.

Rurſùs, ſi valor ipſius y deducendus foret ab Æquatione $\frac{\dot{y}}{2x}+1-2x+\frac{1}{2}xx=\dot{y}$, illum aſſequi potes, & quidem ſatis concinnè, Termino $\frac{\dot{y}}{2x}$ non reducto; modò ſupponas, (ut Analyſtæ faciunt,) datum id quod petitur. Sic, primum Terminum valoris y fingo $2ex$, & pono $2e$ eſſe numeralem Coefficientem, qui adhuc ignotus eſt; &, ſcribendo $2ex$ pro y in marginali Termino, obtineo e, quam Quantitatem pono dextram verſùs, & Aggregatum $1+e$ dabit $x+ex$ pro illo ipſo primo Termino, quem antea repræſentaveram ſymbolo $2ex$. Quapropter facio $2ex=x+ex$, & hinc deduco $e=1$; eſt igitur $2x$ primus valoris y Terminus $2ex$. Eodem pacto, fictitium Terminum $2fxx$ uſurpo ad repræſentandum

ſecun-

ſecundum Terminum valoris y, unde conficitur $-\frac{2}{3}$ pro valore ipſius f, & propterea ſecundus Terminus eſt $-\frac{4}{3}xx$: Haud aliter fictitius Coefficiens g in Termino tertio dabit $\frac{1}{10}$; & h in quarto præbebit o. Quocirca, cùm nullus alius Terminus ſuperſit, perſpicio peractum eſſe Opus, & valorem ipſius y eſſe accuratè $2x - \frac{4}{3}xx + \frac{1}{5}x^3$. Diagramma ſuppoſitum totam Operationem tibi ſiſtit.

	$1 - 2x + \frac{1}{2}xx$
$\frac{y}{2x}$	$e + fx + gxx + hx^3$
Aggregatum	$+1 - 2x + \frac{1}{2}xx$ $+e + fx + gxx + hx^3$
Per hypotheſim	$y = 2ex + 2fxx + 2gx^3 + 2hx^4$
Per conſequens	$y = +x - xx + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{4}hx^4$ $+ex + \frac{1}{2}fxx + \frac{1}{3}gx^3$
Re ipſâ	$y = 2x - \frac{4}{3}xx + \frac{1}{5}x^3$

Eodem pacto, ſi haberes $\dot{y} = \frac{3y}{4x}$, pone $y = ex^s$, ubi e denotat Coefficientem incognitum & s numerum Dimenſionum itidem incognitum. Subſtituendo ex^s pro y fiet $\dot{y} = \frac{3ex^{s-1}}{4}$, & hinc rurſus $\dot{y} = \frac{3ex^s}{4s}$. Confer hos duos valores ipſius y, & invenies $\frac{3e}{4s} = e$; quocirca

quocirca $s = \frac{3}{4}$, & e eſt indefinita; igitur, aſſumptâ e ad libitum, habebis $y = ex^{\frac{3}{4}}$.

I V.

Potes aliquando etiam Operationem incipere ab altiore Quantitatis æquabilis Dimenſione, & gradatim deſcendere ad Poteſtates inferiores. Ut, ſi daretur Æquatio $y = \frac{y}{xx} + \frac{1}{xx} + 3 + 2x - \frac{4}{x}$, velles autem incipere ab altiſſimo Termino $2x$, diſponens Seriem capitalem ordine contrario illi, quem hactenus ſervavimus; hinc demum excuderes $y = xx + 4x - \frac{1}{x}$; &c., juxta modum procedendi hìc appoſitum.

	$+2x + 3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{xx}$
$+\frac{y}{xx}$	$* + 1 + \frac{4}{x} \quad * - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$; &c.
Aggreg.	$+2x + 4 \quad * + \frac{1}{xx} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2x^4}$; &c.
$y = xx + 4x \quad * - \frac{1}{xx} + \frac{1}{2xx} - \frac{1}{6x^3}$; &c.	

Obiter obſerva, quòd in Operationis progreſſu, poteram inſeruiſſe quamcumque datam Quantitatem inter Terminos $4x$, & $-\frac{1}{x}$, pro intermedio Termino qui deeſt; & ita valor ipſius y potuiſſet exhiberi modis infinitis.

V.

Si præterea Quantitas *Relata* habet aliquem Dimensionum suarum fractum Indicem, revocari potest ad Integros, ponendo, quòd Quantitas Indice fracto affecta æqualis est alicui tertiæ Fluenti, & substituendo pro *Relatâ* Quantitate & ejus Fluxionibus Quantitatem eductam ex Æquatione fictitiâ, ejúsque Fluxiones.

Proposita sit, *ex. gr.*, Æquatio $\dot{y} = 3xy^{\frac{2}{3}} + y$, in quâ fracto Indice $\frac{2}{3}$ afficitur Quantitas *Relata*; sumptâ ad libitum Fluente aliquâ z, suppone $y^{\frac{1}{3}} = z$, vel $y = z^3$; Relatio Fluxionum, per Probl. I., erit $\dot{y} = 3zz\dot{z}$: Quapropter scribe $3zz\dot{z}$ pro $\dot{y}$, & z^3 pro y, & zz pro $y^{\frac{2}{3}}$, hinc habiturus $3zz\dot{z} = 3xzz + z^3$ aut $\dot{z} = x + \frac{1}{3}z$, ubi z fungitur officio *Relatæ* Quantitatis. Jam, extracto valore ipsius z, puta, $z = \frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{18} + \frac{x^4}{216} + \frac{x^5}{3240}$; &c., restitue $y^{\frac{1}{3}}$ pro z, & obtinebis petitam Relationem inter x, & y, videlicet $y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{216}x^4$; &c., vel, omnia elevando ad tertiam Potestatem, $y = \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{24}x^7 + \frac{1}{288}x^8$; &c.

Item, si daretur Æquatio $\dot{y} = \sqrt{4y} + \sqrt{xy}$, vel $\dot{y} = 2y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, facio $z = y^{\frac{1}{2}}$, sive $zz = y$, & hinc, per Probl. I., duco $2z\dot{z} = \dot{y}$; quapropter $2z\dot{z} = 2z + zx^{\frac{1}{2}}$, aut $\dot{z} = 1 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}$; ergo, per priorem hujus Problematis Casum, est $z = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, sive $y^{\frac{1}{2}} = x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, & quadrando, $y = xx + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^3$. Sed, si vis valorem y expressum infinitis modis diversis, pone $z = c + x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$,

$+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$, aſſumendo quemvis primum Terminum c, & habebis zz (id eſt y) $= cc + 2cx + \frac{2}{3}cx^{\frac{3}{2}} + xx + \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{9}x^{3}$. Sed fortaſſe hæc perſequens, quæ rarò uſu-venient, nimis minuta ſcrutatus videbor.

SOLUTIO CASUS III.

Statim nos extricabimus à Problemate ſolvendo, quando Æquatio continet tres vel etiam plures Quantitatum Fluxiones. Nam, ad id ſufficit quamlibet Relationem inter binas ſupponere, cùm hæc Relatio à ſtatu quæſtionis non determinatur, & hinc deduci poteſt Relatio, quæ eſt inter earum Fluxiones, ita ut exterminari poſſit alterutra cum Fluxione ſuâ. Quamobrem, ſi trium Quantitatum Fluxiones adſunt, una Æquatio aſſumenda eſt; duæ Æquationes, ſi quatuor inſunt Fluxiones; atque ita porro; ita ut Æquatio propoſita tandem in aliam transformetur, in quâ ſint duæ Fluxiones tantummodo. Tunc autem Æquatio hæc reſolvenda eſt ut ſupra, & ſic detegentur Relationes aliarum Quantitatum.

Sit propoſita Æquatio $2\dot{x} - \dot{z} + \dot{x}y = 0$: Ut obtineam Relationem Quantitatum x, y, & z, quarum Fluxiones $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$ ſunt in Æquatione hâc, fingo Relationem quamlibet inter duas ex ipſis, puta, inter x, & y, ſupponendo quòd $x = y$, aut $2y = a + z$, ſive $x = yy$; &c.: Sumamus $x = yy$, &, (quod hinc conficitur,) $\dot{x} = 2\dot{y}y$. Igitur Æquatio propoſita, ponendo $2\dot{y}y$ pro $\dot{x}$, & yy pro x, mutatur in hanc $4\dot{y}y - \dot{z} + \dot{y}yy = 0$; & hinc educitur Relatio inter y, & z, id eſt, $2yy - z + \frac{1}{3}y^{3} = 0$: Reſtitue x pro yy, & $x^{\frac{3}{2}}$ pro y^{3}, & invenies $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$. Ergo, ex infinitis modis, quibus x, y, & z, altera ad alteram, poſſunt referri, unus inventus fuit, qui exponitur per has Æquationes $x = yy$; $2yy + \frac{1}{3}y^{3} = z$; & $2x + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

DEMONSTRATIO.

Hoc pacto solutum est Problema, sed latet Demonstratio. Cùm autem tot & tam varia contineat hoc Problema, ut Demonstratio syntheticè sine maximis ambagibus deduci nequeat ex genuinis ejus fundamentis, sufficiet eam breviter indicare analyticè. Propositâ igitur Æquatione, & Opere peracto, tenta num ex Æquatione repertâ regredi liceat ad propositam, per Probl. I. Quod ubi accidit, constat Relationem, quæ est inter Quantitates in Æquatione repertâ, requirere Relationem, quæ est inter Fluxiones in propositâ; & vice versâ. *Q. E. D.*

Sic, Æquatione propositâ $\dot{y} = x$, ex eâ deduceretur Æquatio $y = \frac{1}{2}xx$, & ex hâc, vice versâ, per Probl. I., $\dot{y} = x\dot{x}$, aut $\dot{y} = x$, quia $\dot{x}$ sumitur pro Unitate. Eodem pacto, ex $\dot{y} = 1 - 3x + y + xx + xy$ conficitur $y = x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6$; &c., & rursus hinc, per Probl. I., $\dot{y} = 1 - 2x + xx - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{2}{15}x^5$; &c., qui duo valores conveniunt, ut patet substituendo $x - xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5$; &c., pro y in primo valore.

Sed in Æquationum Reductione adhibeo Operationem, cujus rationem afferendam censeo; ea consistit in alicujus fluentis Quantitatis transmutatione per ejus connexionem cum datâ Quantitate. Sint (*Fig.* 4.) AE, atque *ae*, duæ Rectæ utrimque in infinitum protensæ; per quas ferantur duæ res mobiles, aut duo Puncta, quæ eodem Tempore pervenisse concipiantur in loca A, & *a*; B & *b*; C & *c*; D & *d*; &c., & Mobilis, quod fertur per AE, distantia à puncto B illius Motum ita metiatur, ut $-$BA, $+$BC, $+$BD, $+$BE successivè, & quando Mobile est in locis A, C, D, E, sint fluentes Quantitates. Pariter, sit *b* simile Punctum in alterâ Lineâ: Tunc

TAB. I.

Tunc igitur — BA, & — *ba*, erunt duæ contemporaneæ Fluentes, ut etiam + BC, & + *bc*; + BD, & + *bd*; + BE, & + *be*; &c. Jam, ſi Punctis B, & *b*; ſubſtituantur Puncta A, & *c*, ad quæ, velut quieſcentia, referantur Motus; tunc *o*, & — *ca*; + AB, & — *cb*; + AC, & *o*, + AD, & + *cd*; + AE, & + *ce*, erunt contemporaneæ fluentes Quantitates. Quocirca, mutatæ quidem ſunt fluentes Quantitates Additione & Subductione datarum Quantitatum AB, & *ac*; ſed in iis mutatæ non fuerunt neque Motuum Celeritates, neque mutua Fluxionum Relatio. Partes enim eodem Tempore genitæ AB, & *ab*; BC, & *bc*; CD, & *cd*; DE, & *de*, ſunt ejuſdem longitudinis in utrâque hypotheſi. Eodem pacto in Æquationibus has Quantitates exponentibus contemporaneæ Quantitatum partes non ideo mutantur, quia abſoluta earum magnitudo aliquâ datâ Quantitate augetur vel minuitur. Hinc patet propoſitum; etenim eò tantùm tendit Problema, ut determinentur contemporaneæ partes aut differentiæ abſolutarum Quantitatum u, x, y, aut z, deſcriptæ datâ Fluendi Ratione. Nihil autem intereſt cujuſnam abſolutæ magnitudinis ſint hæ Quantitates, dummodò earum contemporaneæ vel correſpondentes differentiæ conveniant cum propoſitâ Fluxionum Relatione.

Hujus rei ratio tradi etiam ſic algebraïcè poteſt. Propoſita ſit Æquatio $\dot{y} = y\dot{x}x$; & ſuppone $x = 1 + z$; igitur, per Probl. I., $\dot{x} = \dot{z}$; Quapropter pro $\dot{y} = y\dot{x}x$ ſcribere licet $\dot{y} = y\dot{x} + y\dot{z}x$.

Nunc, quia $\dot{x} = \dot{z}$, liquet, quòd tametſi Quantitates x, & z, non ſint ejuſdem longitudinis, attamen æqualiter fluunt, reſpectivè ad y, & habent æquales unà genitas partes. Quidni igitur repræſentem eodem ſymbolo Quantitates, quarum Ratio fluendi eadem eſt, & ad determinandas earum contemporaneas differentias quidni ſcribam $\dot{y} = y\dot{x} + y\dot{x}x$, pro $\dot{y} = y\dot{x}x$.

Demum manifeſtò apparet, quomodo inveniri poſſint partes contemporaneæ ex Æquatione Fluentes involvente.

Sic adſit Æquatio $y = \frac{1}{x} + x$, &, cùm $x = 2$, ſit $y = 2\frac{1}{2}$;

at, cùm $x = 3$, tunc $y = 3\frac{1}{3}$. Igitur, dum x fluit ex 2 in 3, y fluit ex $2\frac{1}{2}$ in $3\frac{1}{3}$, quapropter partes eodem Tempore deſcriptæ ſunt $3 - 2 = 1$, & $3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.

His, tanquam dicendorum fundamentis ſubſtratis, ad magis peculiaria Problemata deſcendam.

PROBL. III.

Quantitatum Maxima *&* Minima *determinare.*

Cùm Quantitas eſt omnium poſſibilium *Maxima*, vel *Minima*, ea, hoc ipſo Temporis momento, nec retroverſum fluit, nec antrorſum: Nam, ſi antrorſum fluere, id eſt, creſcere poſſet, ante Fluxionem certè minor erat, quàm pòſt; & pòſt major quàm antea. Et, vice versâ, ſi retroverſum flueret vel decreſceret. Igitur quære ejus Fluxionem, per Probl. I., & eam nihilo æqualem pone.

EXEMPL. I.

Quærendus ſit maximus Valor ipſius x in Æquatione $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$; quære Relationem Fluxionum $\dot{x}$, & $\dot{y}$, & invenies $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$: Fac $\dot{x} = 0$, reſtabit $ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$ vel $3yy = ax$. Hujus ope exterminabis alterutram ex Fluentibus x, & y è primariâ Æquatione, & aliam determinabis ex Æquatione hinc proveniente; & deinde ambas per $-yy + ax = 0$.

Hoc facere non aliud eſt, quàm multiplicare Terminos Æquationis propoſitæ per Dimenſiones alterius fluentis Quantitatis y. Hinc deduci poteſt notiſſima Regula HUDDENII, quâ jubetur, ut ad inveniendam maximam vel minimam Quantitatem *Relatam*; Æquatio diſponatur juxta Dimenſiones Quantitatis *Correlatæ*, & Termini multiplicentur per aliquam arithmeticam Progreſſionem. Sed quia neque hæc Regula, nec ulla alia ex iis, quas vulgatas ſcio, ſe extendit

tendit ad Æquationes affectas furdis Quantitatibus, absque prævia Reductione; idcirco sequens dabo Exemplum ad hunc Casum spectans.

EXEMPL. II.

Determinanda sit maxima Quantitas y in Æquatione $x^3 - ayy + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$. Quære Fluxiones x, & y, quod dabit Æquationem $3xx\dot{x} - 2a\dot{y}y + \frac{3abyy\dot{y} + 2by^3\dot{y}}{aa+2ay+yy} - \frac{4ayx\dot{x} + 6x^3\dot{x} + axx\dot{y}}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$. Jam, quia, per hypothesim, $\dot{y} = 0$, omitte Terminos ductos in $\dot{y}$, (quos ad laborem minuendum omisisse potuisses inter operandum,) & quos superstites invenies divide per $x\dot{x}$, demum habiturus $3x - \frac{2ay+3xx}{\sqrt{ay+xx}} = 0$: Hinc, Reductione facta, assequeris $4ay + 3xx = 0$, cujus ope poteris exterminare alterutram ex Quantitatibus x, & y, ex proposita Æquatione; & illa, quæ hinc exsurget, (erit autem cubica) dabit alterius valorem.

Ex hoc Problemate deduci potest Solutio sequentium.

I.

Dato Triangulo, aut Segmento cujusvis datæ Curvæ, inscribere maximum Rectangulum.

II.

Ducere maximam aut minimam rectam Lineam, quæ jacere possit inter datum Punctum & Curvam positione datam: Aut, *ex dato Puncto ducere Rectam, quæ ad rectos Angulos occurrat Curvæ.*

III.

Ducere rectam Lineam maximam aut minimam earum, quæ transeunt per datum Punctum, & jacent inter duas alias Lineas sive Rectas, sive Curvas.

IV. Ex-

IV.

Ex Puncto dato in Parabolâ Rectam excitare, quæ Parabolam secet sub Angulo omnium maximè obliquo. Idémque facere in aliis Curvis.

V.

Determinare Curvarum Vertices, earum maximas aut minimas latitudines, Puncta, in quibus partes gyrantes sese mutuò secant; &c.

VI.

Invenire Puncta Curvarum, in quibus ea maximè vel minimè curva sunt.

VII.

In datâ Ellipsi reperire minimum Angulorum, quo Ordinatæ earum Diametrum secent.

VIII.

Ex omnibus Ellipsibus, quæ transire possunt per data quatuor Puncta, determinare maximam, vel eam quæ ad Circulum quàmproximè accedit.

IX.

Determinare partem sphæricæ Superficiei in remotiori Hemisphærio, quam illuminare potest Lux progrediens è magno intervallo, & refracta ab Hemisphærio proximiori.

Plura alia Problemata hujuscemodi faciliùs proponi possunt, quàm resolvi ob Calculi laborem.

PROBL.

PROBL. IV.

Ducere Tangentes ad Curvas.

PRIMUS MODUS.

Tangentes modis ſanè variis duci poſſunt pro variis Relationibus, quæ inter rectas Lineas & Curvas intercedunt. Et primò quidem ſit (*Fig.* 5.) BD recta Linea, vel Ordinata, faciens Angulum quemvis datum cum aliâ Rectâ AB, (quæ Baſis eſt vel Abſciſſa,) & terminata ad Curvam ED. Moveatur Ordinata per ſpatium indefinitè parvum uſque ad locum bd, ita ut ea augeatur Momento cd, cùm AB augetur Momento Bb, cui Dc æqualis eſt & parallela. Producatur Dd donec ipſi AB occurrat in T; & hæc Linea Curvam tanget in D vel d, & ſimilia erunt Triangula dcD, DBT, quapropter TB : BD :: Dc (vel Bb) : cd. TAB. I.

Cùm autem Relatio BD ad AB exprimatur Æquatione, quâ definitur Curvæ natura; hinc erue Fluxionum Relationem, per Probl. I. Deinde cape TB ad BD in eâdem Ratione, in quâ Fluxio ipſius AB eſt ad Fluxionem BD; & acta TD Curvam tanget in Puncto D.

EXEMP. I.

Si dicantur AB $= x$, & BD $= y$, earúmque Relatio exponatur per $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$; erit Fluxionum Relatio $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} + ay\dot{x} - 3yy\dot{y} = 0$; igitur $\dot{y} : \dot{x} :: 3xx - 2ax + ay : 3yy - ax ::$ BD (y) : BT. Quapropter BT $= \frac{3y^3 - axy}{3xx - 2ax + ay}$. Datur autem Punctum D; quare etiam DB, & BA, vel y, & x; ergo BT magnitudine datur, & hinc Tangens TD determinatur.

Hoc autem pacto concinnior reddi poteſt operandi Methodus. Propoſitæ Æquationis Terminos pone æquales nihilo; eos multiplica per numerum Dimenſionum Ordinatæ; &, quod hinc conficitur, pone in Numeratore; deinde multiplica Terminos ejuſdem Æquationis per numerum Dimenſionum Abſciſſæ, & Productum di-

divisum per Abscissam pone in Denominatore valoris BT; tunc accipe BT versùs A, si ejus valor est affirmativus, & ad contrarias partes, si negativus.

Sic Æquatio $\overset{0}{\underset{3}{x^3}} - \overset{0}{\underset{2}{axx}} + \overset{1}{\underset{1}{axy}} - \overset{3}{\underset{0}{y^3}} = 0$, multiplicata per superiores Numeros dat, $axy - 3y^3$ pro Numeratore, & multiplicata per inferiores Numeros ac divisa per x præbet $3xx - 2ax + ay$ pro Denominatore valoris BT.

Pariter, Æquatio $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy = 0$, (quæ exprimit naturam Parabolæ secundi generis, cujus ope CARTESIUS construxit Æquationes sex Dimensionum; Vide ejus Geometriam *p.* 42. *Amstel. Ed. An.* 1659,) ipso intuitu dat $\frac{3y^3 - 2byy - cdy + dxy}{dy}$, sive $\frac{3yy}{d} - \frac{2by}{d} - c + x = BT$.

Eâdem quoque ratione $aa - \frac{r}{q}xx - yy = 0$, (quæ pertinet ad Ellipsim, cujus centrum est A) præbet $\frac{-2yy}{-\frac{2r}{q}x}$, aut $\frac{qyy}{rx} = BT$; & sic de ceteris.

Notare potes, quòd nihil interest quinam sit Angulus, quem Ordinatæ faciunt cum Abscissâ.

Sed Regula hæc se non extendit, neque ad Æquationes affectas Quantitatibus surdis, neque ad Curvas mechanicas; tunc autem confugiendum est ad Methodum, quâ hæc, tanquam fundamento, innititur.

EXEMPL. II.

Sit Æquatio $x^3 - ayy + \frac{by^3}{a+y} - xx\sqrt{ay+xx} = 0$, exponens Relationem, quæ est inter AB, & BD, eritque, per Probl. I., Relatio Fluxionum $3\dot{x}xx - 2a\dot{y}y + \frac{3ab\dot{y}yy + 2by^3\dot{y}}{aa + 2ay + yy} - \frac{4ay\dot{x}x - 6x^3\dot{x} - ax\dot{x}y}{2\sqrt{ay+xx}} = 0$; quam-

quamobrem erit $3xx - \frac{4ayx - 6x^3}{2\sqrt{ay+xx}} : 2ay - \frac{3abyy - 2by^3}{aa+2ay+yy}$ $+ \frac{axx}{2\sqrt{ay+xx}} :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : DT.

E x e m p l. III.

Sit (*Fig.6.*) E D Conchois *Nicomedæa*, cujus Polus G, Aſymptotus AT, Intervallum LD; & ſit $AG = b$, $LD = c$, $AB = x$, & $BD = y$. Similia Triangula DBL, & DMG dant LB: BD :: DM: MG, id eſt, $\sqrt{cc-yy} : y :: x : b+y$, & idcirco $\overline{b+y} \times \sqrt{cc-yy} = xy$: Hâc Æquatione repertâ, ſuppono $\sqrt{cc-yy} = z$, unde conſequor duas Æquationes $bz + yz = xy$, & $cc - yy = zz$, quarum ope invenio Fluxiones Quantitatum x, y, & z, per Probl. I. Prima dat $b\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} = y\dot{x} + x\dot{y}$; & Secunda $-2y\dot{y} = 2z\dot{z}$, aut $z\dot{z} + y\dot{y} = 0$. Ex his autem amove $\dot{z}$, inventurus $-\frac{by\dot{y}}{z}$ $-\frac{yy\dot{y}}{z} + z\dot{y} = y\dot{x} + x\dot{y}$; hæc autem Æquatio reſoluta dat $y : z$ $-\frac{yy}{z} - \frac{by}{z} - x :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : BT; atqui BD eſt ipſa y, ergo $BT = z - x - \frac{yy - by}{z}$, ſcilicet $-BT = AL + \frac{BL \times GM}{BL}$, ubi ſignum — præfixum ipſi BT denotat, quòd Punctum T ſumendum eſt ad partes contrarias Puncto A.

TAB. I.

S C H O L I U M.

Hinc patet quomodo reperiri valeat in Conchoïde Punctum, quod ſeparat partem convexam à concavâ. Illud enim erit, cùm AT eſt omnium minima. Dic igitur $AT = u$; &, quia $BT = -z + x$ $+ \frac{by + yy}{z}$, erit $u = -z + 2x + \frac{by + yy}{z}$. Opus brevius redditurus pro x pone $\frac{bz + yz}{y}$, qui valor manat è ſupra-dictis, &

 habebis

habebis $\frac{2bz}{y} + z + \frac{by + yy}{z} = u$: Unde erui possunt, per Probl. I., Fluxiones $\dot{u}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$; ac, supponendo $\dot{u} = 0$, per Probl. III., invenies $\frac{2b\dot{z}}{y} - \frac{2bz\dot{y}}{yy} + \dot{z} + \frac{b\dot{y} + 2y\dot{y}}{z} - \frac{byz + zyy}{zz}$ $= \dot{u} = 0$. Denique, substituendo in hâc Æquatione $-\frac{y\dot{y}}{z}$ pro $\dot{z}$, & $cc - yy$ pro zz, (quos valores jam inveneramus); ac factâ Reductione legitimâ, obtinebis $y^3 + 3byy - 2bcc = 0$, cujus Æquationis Constructio determinabit y vel AM; & MD parallela AB acta per punctum M cadet in Punctum D Flexûs contrarii.

Quod si Curvæ, ad quas Tangentes ducendæ sunt, forent mechanicæ; Quantitatum Fluxiones inveniri deberent, ut in Exempl. V. Probl. I. & cetera fieri ut supra.

EXEMPL. IV.

TAB. II. Sint (*Fig.* 7.) AC, & AD duæ Curvæ, quæ secant in Punctis C & D Rectam BCD applicatam Abscissæ AB in dato Angulo. Sint $AB = x$, $BD = y$, & $\frac{\text{Area } ACB}{1} = z$; eritque (per Probl. I. Præpar. ad Exemp. V.) $\dot{z} = \dot{x} \times BC$.

Jam, sit AC Circulus vel aliqua ex notis Curvis; & ad determinandam Curvam AD data sit Æquatio involvens z, puta, $zz + azx = y^4$. Ergo, per Probl. I., $2z\dot{z} + ax\dot{z} + az\dot{x} = 4y^3\dot{y}$; &, scribendo $\dot{x} \times BC$ pro $\dot{z}$, erit $2z\dot{x} \times BC + ax\dot{x} \times BC + az\dot{x}$ $= 4y^3\dot{y}$; quapropter $2z \times BC + ax \times BC + az : 4y^3 :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : BT. Igitur, datâ naturâ Curvæ AC, Ordinatâ BC, & Areâ ACB vel z; dabitur etiam Punctum T, per quod transit Tangens DT.

Eodem pacto, si $3z = 2y$ est Æquatio pertinens ad Curvam AD, erit $(3\dot{z})$ $3\dot{x} \times BC = 2\dot{y}$, & ideo $3BC : 2 :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : BT; & sic de ceteris.

EXMPL.

EXEMPL. V.

Sit AB $=x$, BD $=y$, ut priùs, & longitudo Curvæ AC $=z$; & actâ Tangente quâvis, ut Ct, erit Bt : Ct :: $\dot{x}:\dot{z}$, aut $\dot{z}=\frac{\dot{x}\times Ct}{Bt}$.

Nunc altera Curva AD, ad quam Tangens eſt ducenda, definiatur aliquâ datâ Æquatione involvente z; *ex. gr.*, $z=y$, quocirca $\dot{z}=\dot{y}$, ergo Ct : tB :: ($\dot{y}:\dot{x}$ ::) DB : BT. Invento autem Puncto T, duci poteſt Tangens DT.

Pariter, ſupponendo $xz=yy$, fiet $x\dot{z}+z\dot{x}=2y\dot{y}$, unde, ſcribendo $\frac{\dot{x}\times Ct}{Bt}$ pro $\dot{z}$, conficietur $\frac{x\dot{x}\times Ct}{Bt}+z\dot{x}=2y\dot{y}$, & hinc $z+\frac{x\times Ct}{Bt}:2y$ :: BD : DT.

EXEMPL. VI.

Sit (*Fig.* 8.) AC Circulus, aut quæcumque alia Curva cognita, cujus Tangens eſt Ct; & ſit AD alia Curva, cujus Tangens agi debet, & quæ definitur aſſumendo AB æqualem Arcui AC; Síntque CE, BE Ordinatæ ad AB ſub quovis dato Angulo; & Relatio, quæ eſt inter BD, & CE vel EA, exprimatur Æquatione aliquâ. TAB. II.

Nunc dic AB vel AC $=x$, BD $=y$, AE $=z$, & CE $=u$. Liquet, quòd $\dot{u}$, $\dot{x}$, & $\dot{z}$, Fluxiones ipſarum CE, AC, & AE, eandem inter ſe Rationem habent ac CE, Ct, & Et; quapropter $\frac{\dot{x}\times CE}{Ct}=\dot{u}$, & $\frac{\dot{x}\times Et}{Ct}=\dot{z}$.

Jam, detur Æquatio quævis definiens Curvam AD, puta, $y=z$. Igitur $\dot{y}=\dot{z}$; ergo Et : tC :: ($\dot{y}:\dot{x}$ ::) DB : BT.

 Aut

Aut data Æquatio sit $y = z + u - x$, unde assequemur $\dot{y} = (\dot{z} + \dot{u} - \dot{x} =) \dot{x} \times \frac{CE + Et - tC}{Ct}$, & idcirco $CE + Et - tC : Ct :: (\dot{y} : \dot{x} ::) DB : BT$.

Aut denique detur Æquatio $ayy = u^3$, quæ progignet $2ay\dot{y} = (3uu\dot{u} =) 3uu\dot{x} \times \frac{CE}{Ct}$: Hinc autem conficitur $3uu \times CE : 2ay \times Ct :: DB : BT$.

Exempl. VII.

TAB. II. Sit (*Fig.* 9.) FC Circulus, quem CS tangit in C, & sit FD Curva, quæ definitur assumpta aliquâ Relatione inter Ordinatam DB & Arcum FC terminatum ab AD ductâ per Centrum. Tunc, demissâ CE ordinatim ad Circulum, dic AC vel $AF = 1$, $AB = x$, $BD = y$, $AE = z$, $EC = u$, & $CF = t$; hinc habebis $z\dot{t} = (\dot{t} \times \frac{EC}{SC} =) \dot{u}$, & $-u\dot{t} = (\dot{t} \times - \frac{ES}{CS} =) \dot{z}$; ubi pono $\dot{z}$ Quantitatem negativam, quia AE decrescit, crescente EC. Præterea, $AE : EC :: AB : BD$, ergo $zy = ux$, quocirca, per Probl. I., $z\dot{y} + y\dot{z} = u\dot{x} + x\dot{u}$; unde exterminatis $\dot{z}$, $\dot{u}$, & u, provenit $x\dot{y} - yy\dot{t} - xx\dot{t} = y\dot{x}$.

Definiatur nunc Curva DF aliquâ Æquatione, unde excudi possit valor ipsius $\dot{t}$ in Æquatione nuper inventâ ponendus. Suppone, *ex. gr.*, $t = y$, (Æquatio ad primam Quadratricem); ergo, per Probl. I., $\dot{t} = \dot{y}$, & $x\dot{y} - yy\dot{y} - xx\dot{y} = y\dot{x}$; quamobrem $y : -x + yy + xx :: (\dot{y} : -\dot{x} ::) BD (y) : BT$: Est igitur $BT = xx + yy - x$, & $AT = xx + yy = \frac{ADq}{AT}$.

Haud aliter, si foret $tt = by$, haberemus $2t\dot{t} = b\dot{y}$, & propterea $AT = \frac{b}{2t} \times \frac{ADq}{AF}$, atque ita porro.

Exempl.

EXEMPL. VIII.

Sit (*Fig.* 10.) nunc AD Recta æqualis Arcui FC, & Curva ADH Spiralis *Archimedæa*, ftantibus nominibus, quæ fupra Lineis impofuimus. Ob rectum Angulum ABD, eft $xx + yy = tt$; & idcirco (per Probl. I.) $x\dot{x} + y\dot{y} = t\dot{t}$. Atqui AD : AC :: DB : CE, ergo $tu = y$, & eâ de causâ (per Probl. I.) $t\dot{u} + u\dot{t} = \dot{y}$. Denique, Fluxio Arcûs FC eft ad Fluxionem rectæ Lineæ CE, ut CA ad AE, vel ut AD ad AB, videlicet $\dot{t} : \dot{u} :: t : x$; & propterea $x\dot{t} = t\dot{u}$: Confer Æquationes nuper inventas, & perfpicies effe $u\dot{t} + x\dot{t} = \dot{y}$; quocirca etiam erit $x\dot{x} + y\dot{y} = (t\dot{t} =) \frac{t\dot{y}}{u+x}$: Ergo, fi, completo Parallelogrammo ABDQ, facias DQ : QP :: (DB : BT :: $\dot{y} : -\dot{x}$ ::) $x : y - \frac{t}{u+x}$, id eft, fi abfcindas AP $= \frac{t}{u+x}$, erit PD Perpendicularis Spirali. TAB. II.

Hinc, opinor, fatis patet quâ viâ duci poffint Tangentes ad omnigenas Curvas. Attamen extra rem non puto oftendere quomodo Problema folvi poffit, quando Curvæ referuntur ad Rectas quocumque alio modo: Eo enim pacto, præ manibus habens plures methodos diverfas, femper ufurpare poteris faciliorem fimul, ac fimpliciorem.

SECUNDUS MODUS.

Sit (*Fig.* 11.) D Punctum in Curvâ, ex quo ad datum Punctum G ducta fit fubtenfa DG, & fit DB ordinatim applicata ad Abfciffam AB fub dato Angulo quocumque. Jam fluat Punctum D per infinitè parvum Curvæ fpatium Dd, & ex GD, abfcindatur Gk æqualis ipfi Gd, ac compleatur Parallelogrammum $dcBb$. Tunc Dk, & Dc erunt eodem tempore genita Momenta ipfarum GD, DB, quibus nempe utraque mulctatur, dum D transfertur in d. TAB. II.

Jam,

Jam, recta Linea Dd producatur, donec secet ipsam AB in T; & ex Puncto T ad subtensam GD demittatur ad rectos Angulos TF; unde formabuntur similia Trapezia Dcdk, & DBTF; & ideo BD : DF :: cD : Dk.

Cùm igitur Æquatio Curvam determinans exhibeat Relationem, quæ est inter BD & DG, quære Fluxionum Relationem; & abscinde DF quartam post DB, Fluxionem GD, & Fluxionem BD. Dehinc ex F excita Perpendicularem FT, & juncta DT Curvam tanget in D. Erit DF capienda versùs G, si ea est affirmativa; & ad contrarias partes, si negativa.

EXEMPL. I.

Dic GD $= x$ & DB $= y$; ac Relatio earum exponatur per $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$: Relatio Fluxionum erit $3xx\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3yy\dot{y} = 0$: Quâ de causâ $3xx - 2ax + ay : 3yy - ax :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ DB(y) : DF; Ergo DF $= \frac{3y^3 - axy}{3xx - 2ax + ay}$. Jam, cùm detur in Curvâ Punctum D, & idcirco BD, & DG, vel y, & x, dabitur etiam Punctum F; ex quo si educatur Perpendicularis FT, hæc Abscissæ AB occurrens in T, aperiet viam ad ducendam Tangentem TD.

Hinc, ut patet, manat ipsa eadem Regula, quam pro primo casu inveneramus. Nam, dispone omnes datæ Æquationis Terminos in unâ eâdémque parte, eos multiplica per Ordinatæ y Dimensiones, &, quod hinc provenit, pone in Fractionis Numeratorem: Deinde singulos hos Terminos duc in Subtensæ x Dimensiones, Factum divide per Subtensam x, & Quotientem adscribe Denominatori valoris DF: Illam verò Lineam DF sumes versùs G, si affirmativus est ejus valor; sin minùs, ad contrarias partes. Hic animadvertere potes, quòd in toto hoc negotio nulla habetur ratio distantiæ Puncti G ab Abscissâ AB, (licèt nulla esset hæc distantia,) nec Anguli ABD, quem Ordinata BD facit cum Abscissâ BA.

Sit

Sic Æquatio superior $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$ statim dat $axy - 3y^3$ pro Numeratore, & $3xx - 2ax + ay$ pro Denominatore valoris DF.

Sic pariter $a + \frac{b}{a}x - y = 0$ (Æquatio spectans ad conicas Sectiones) præbet $-y$ pro Numeratore, & $\frac{b}{a}$ pro Denominatore valoris DF, ideo futuræ $= -\frac{ay}{b}$.

Haud aliter (*Fig.* 6.) in Conchoïde, (in quâ Problema solvi potest expeditiùs quàm supra,) ponendo $GA = b$, $LD = c$, $DG = x$, & $BD = y$; erit BD (y): DL (c) :: AG (b): GL ($x - c$); quare $xy - cy = bc$ aut $xy - cy - bc = 0$. Hæc Æquatio, juxta Regulam, dat $\frac{xy - cy}{y}$, videlicet $x - c = DF$. Produc igitur GD in F, ita ut sit $DF = LG$; ad F erige Perpendicularem FT, quæ occurrat Asymptoto AB in T; acta TD Conchoïdem tanget. TAB. I.

Si quando autem compositæ aut surdæ Quantitates sunt in Æquatione, confugiendum est ad generalem Methodum, nisi malis Æquationem reducere.

EXEMPL. II.

Si (*Fig.* 11.) Æquatio $\overline{b+y} \times \sqrt{cc - yy} = xy$ daretur ad exprimendam Relationem, quæ inter GD, & DB intercedit; quære Fluxionum Relationes, per Probl. I., *ex. gr.*, suppone $\sqrt{cc - yy} = z$, unde conficientur Æquationes $bz + yz = xy$, & $cc - yy = zz$: Hinc invenientur Fluxionum Relationes $b\dot{z} + y\dot{z} + z\dot{y} = x\dot{y} + y\dot{x}$, & $-2\dot{y}y = 2\dot{z}z$. Nunc, exterminatis $\dot{z}$ & z, habebis $\dot{y}\sqrt{cc - yy} - \frac{by\dot{y} + yy\dot{y}}{\sqrt{cc - yy}} - x\dot{y} = y\dot{x}$; igitur $y : \sqrt{cc - yy} - \frac{by + yy}{\sqrt{cc - yy}} - x$ :: ($\dot{y} : \dot{x}$ ::) BD (y): DF. TAB. III.

TERTIUS MODUS.

TAB. II. Quinimo (*Fig.* 12.) si Curva referretur ad duas subtensas AD & DB, quæ ductæ à duobus datis Punctis A, & B, convenirent ad Curvam. Concipe Punctum D fluere in Curvâ per infinitè parvum spatium D*d*, & ex AD, ac DB, abscinde A*k* quidem æqualem A*d*, & B*c* parem B*d*; tunc *k*D & D*c*, erunt simul genita Momenta Linearum AD, DB. Quapropter sume FD, quæ ad DB habeat eandem Rationem ac Momentum *k*D ad Momentum D*c*, (id est Fluxio Rectæ AD ad Fluxionem ipsius DB); & age BT, TF Perpendiculares ipsis DB, AD, & sibi mutuò occurrentes in T: similia erunt Trapezia DFTB ac D*kdc*, quamobrem Diagonalis DT Curvam tanget.

Igitur ex Æquatione definiente Relationem, quæ est inter AD & DB excude, per Probl. I., Relationem, quæ inter Fluxiones intercedit, & abscinde DF habentem ad DB eandem Rationem.

EXEMPL. I.

Supponamus AD $= x$, & DB $= y$, & earum Relatio sit $a + \frac{ex}{d} - y = 0$. Hæc autem Æquatio spectat ad Ellipses secundi Ordinis, quarum Proprietates pertinentes ad Lucis Refractionem demonstratæ fuerunt à CARTESIO in secundo suæ *Geometriæ* Libro.

Jam Fluxionum Relatio erit $\frac{e\dot{x}}{d} - \dot{y} = 0$, quapropter $e : d ::$ $(\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : DF.

Eâdem ratione, si foret $a - \frac{ex}{d} - y = 0$, haberemus $e : -d ::$ BD : DF. In primâ hypothesi sumi deberet DF versùs A, & ad contrarias partes in secundâ.

COROLL. I.

Ergo si $d = e$, (tunc autem Curva evaderet Sectio conica,) esset

esset FD = DB; & propterea Triangula DFT, & DBT, æqualia essent, & Angulus FDB bisectus à Tangente.

C o r o l l. II.

Hinc etiam sponte fluunt ea, quæ satis operosè demonstravit Cartesius de Lucis per has Curvas Refractione. Nam, si DT sumatur pro Radio, sunt DF, & DB, (qui sunt in datâ Ratione *d* ad *e*,) sinus Angulorum DTF, & DTB, quos nempe faciunt Radius AD Incidens in superficiem Curvæ, & ejus Reflexus aut Refractus DB. Et similiter est ratiocinandum de Refractione Sectionum conicarum, cùm alterutrum ex Punctis A vel B concipitur ad infinitum intervallum.

Facilè modificari posset hæc Regula, ut de superiore fecimus, & plura harum modificationum exempla afferre : Quinimo, si quâvis aliâ ratione Curvæ referantur ad Rectas, nec facilè ad superiores Relationum modos revocari possint, facile erit, pro re natâ, novas Methodos invenire in allatarum imitationem.

QUARTUS MODUS.

Gyret, (*Fig.* 14.) *ex. gr.*, recta Linea BCD circa datum Punctum B, & unum ex Punctis ejus D describat Curvam quamdam, dum alterum C semper est in communi Sectione Rectæ BCD & alterius Rectæ AC positione datæ. Exprimatur insuper Æquatione aliquâ Relatio, quæ est inter CB, & BD: Age BF Parallelam ipsi AC, eámque produc, donec in F occurrat ipsi FD Perpendiculari ad B: Rursus erige FT ad rectos Angulos ipsi DF; & inveni FT, quæ ad BC eandem habeat Rationem ac Fluxio DB ad Fluxionem BC. Tanget enim Curvam acta DT. TAB. III.

QUINTUS MODUS.

Sed si, dato Puncto A, Æquatio exprimeret Relationem inter AC, & BD, agere deberes CG Parallelam ipsi DF, & quærere FT, ita ut ea foret ad BG, ut Fluxio BD est ad Fluxionem AC.

SEXTUS MODUS.

Rursus, si Æquatio exponeret Relationem inter AC, & CD; conveniant Rectæ AC & FT in H, & sume HT, quæ ad BG eandem habeat Rationem ac Fluxio DC ad Fluxionem CA. Et sic de ceteris.

SEPTIMUS MODUS.

Pro Spiralibus.

Neque aliter perficitur Problema, cùm Curvæ referuntur, non ad rectas Lineas, sed ad alias Curvas; quod usu-venit in mechanicis Curvis. Sit (*Fig.* 15.) BG Peripheria Circuli, cujus semidiameter est AG, quæ dum gyrat circa Centrum A, concipiatur Punctum D moveri quovis pacto, dummodo Spiralem aliquam ADE describat: Suppone Dd esse infinitè exiguam partem Curvæ, per quam fluat D, ac sume $cA = Ad$; eruntque cD, & Gg, eodem tempore nata Momenta Rectæ AD & Peripheriæ BG: Quapropter age At Parallelam cd, id est, ad rectos Angulos ipsi AD, eámque secet in T Tangens TD; tum erit $Dc : cd :: DA : AT$. Rursum sit Gt Parallela Tangenti DT, & habebis $cd : Gg :: (Ad$ vel $AD : AG ::) AT : At$.

TAB. III.

Quocirca, propositâ Æquatione exprimente Relationem, quæ intercedit inter ipsas BG & AD, quære Relationem, quæ est inter earum Fluxiones, per Probl. I. & fac in eâdem Ratione tA ad AG; Juncta Gt erit Tangenti parallela.

EXEMPL. I.

Dictis $BG = x$, & $AD = y$, sit earum Relatio $x^3 - axx + axy - y^3 = 0$: Erit, per Probl. I., $3xx - 2ax + ay : 3yy - ax :: (y : x ::) DA : At$: Puncto autem t sic invento, age tG & ipsi parallelam DT, quæ Curvam tanget.

EXEMPL.

EXEMPL. II.

Si haberetur $\frac{ax}{b} = y$, (quæ eſt Æquatio ad Spiralem *Archimedeam*,) eſſet $\frac{a\dot{x}}{b} = \dot{y}$, & idcirco $a : b :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ DA : A*t*. Unde, obiter, ſi producatur AT in P, ita ut ſit PA : AB :: $a : b$, juncta PD erit Perpendicularis ad Curvam.

EXEMPL. III.

Si eſſet $xx = by$, foret $2\dot{x}x = b\dot{y}$, & $2x : b ::$ DA : A*t*. Et hoc pacto Tangentes facilè duci poſſunt ad quaſcumque Spirales.

OCTAVUS MODUS.

Pro Quadratricibus.

Si verò Curva eſſet ejuſmodi naturæ, ut quævis Recta AGD (*Fig.* 16.) acta per Centrum A ſecaret Arcum Circuli in G & Curvam in D, ac Relatio, quæ eſt inter Arcum BG, & rectam Lineam DH ordinatim applicatam Baſi aut Abſciſſæ AH ſub dato Angulo, definiretur Æquatione quâlibet: Concipe Punctum D moveri in Curvâ per infinitè parvum ſpatiolum D*d*, & comple Parallèlogrammum *dh*H*k*; dehinc produc A*d* ad *c*, ut *c*A = AD; erúntque G*g* ac D*k*, ſimul generata Momenta Arcûs BG & Ordinatæ DH. Jam, produc D*d* rectâ in T, ubi occurret ipſi AB, & hinc educ TF perpendicularem ad D*c*F: Erunt igitur ſimilia Trapezia D*kdc* & DHTF, quocirca *k*D : D*c* :: DH : DF. Quòd ſi præterea ducatur G*f* ad rectos Angulos ipſi AG & ſecans AF in *f*, erit, (ob Parallelas DF & G*f*,) D*c* : G*g* :: DF : G*f*; ergo, *ex æquo*, D*k* : G*g* :: DH : G*f*, id eſt, ut Momenta Fluxionum Linearum DH, & BG.

TAB. III.

Quære igitur ex Æquatione exponente Relationem BG ad DH Relationem Fluxionum (per Probl. I.); & in eâdem Ratione fac

Gf, Tangentem scilicet Circuli BG, ad DH; age DF Parallelam Gf, quæ secet Af productam in F, ad F erige Perpendicularem FT occurrentem ipsi AB in T, & juncta DT tanget Quadratricem.

EXEMPL. I.

Faciendo $BG = x$, & $DH = y$, fit $xx = by$, ergo (per Probl. I.) $2x\dot{x} = b\dot{y}$; quapropter $2x : b :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ DH: Gf; & Puncto f determinato, cetera perficientur ut supra.

Sed hæc Regula potest aliquando sic fortasse elegantior fieri: Fac $\dot{x} : \dot{y} ::$ BA : AL: Deinde, AL : AD :: AD: AT; ac juncta DT Curvam tanget. Nam, æqualia Triangula AFD, ATD dant AD $\times$ DF $=$ AT $\times$ DH, &, propterea, AT: AD :: (DF vel $\frac{AD}{AG}$ $\times Gf$: DH aut $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ Gf ::) AD: ($\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ AG sive) AL.

EXEMPL. II.

Sit $x = y$ (quæ Æquatio ad Veterum Quadraticem pertinet), erit quoque $\dot{x} = \dot{y}$: Quocirca AB: AD :: AD: AT.

EXEMPL. III.

Sit $axx = y^3$, ergo $2ax\dot{x} = 3yy\dot{y}$: Fac itaque $3yy : 2ax :: (\dot{x} : \dot{y}$ ::) AB: AL; deinde AL: AD :: AD: AT, & sic expeditè determinare licet Tangentes ad quascumque alias Quadratices quantumlibet compositas.

NONUS MODUS.

Denique sit ABF data quævis Curva, quam tangit Recta Bt; & BD pars Rectæ BC, (quæ ordinatim applicata est sub dato quolibet Angulo Abscissæ AC,) intercepta inter hanc datam & aliam Curvam

Curvam DE, ad partem Curvæ AB habeat Relationem aliquam expressam Æquatione quâcumque; ad secundam hanc Curvam duces Tangentem DT, sumendo (in prioris Curvæ Tangente) TB, quæ ad BD habeat eandem Rationem ac Fluxio Curvæ AB ad Fluxionem Rectæ BD.

EXEMPL. I.

Vocatis $AB = x$, & $BD = y$, fit $ax = yy$, & ideo $a\dot{x} = 2y\dot{y}$: Erit $a : 2y :: (\dot{y} : \dot{x} ::)$ BD : BT.

EXEMPL. II.

Sit $\frac{a}{b} x = y$, (Æquatio ad Trochoïdem si ABF est Circulus,) ergo $\frac{a}{b} \dot{x} = \dot{y}$, & $a : b ::$ BD : BT.

Nec difficiliùs ducentur Tangentes, cùm Relatio, quæ est inter BD & AC aut CB, expressa est per Æquationem aliquam, vel quando Curvæ referuntur ad rectas Lineas, sive ad alias quasvis Curvas, quomodocumque demum id fiat.

Aliorum quoque Problematum Solutio deduci potest ex iisdem Principiis. Hujus generis sunt sequentia.

I.

Invenire in Curvâ Punctum, in quo Tangens parallela sit Abscissæ, vel cuivis alteri Lineæ rectæ positione datæ, aut ad eam perpendicularis, vel obliqua sub Angulo dato.

II.

Invenire Punctum, ubi Tangens est omnium maximè, vel minimè inclinata ad Abscissam, vel ad aliam rectam Lineam positione datam. Videlicet.

Invenire confinia Flexuum contrariorum. Hujus Problematis specimen jam dedimus in Conchoïde.

III. *Ex*

III.

Ex Puncto dato extra Curvæ Perimetrum ducere Rectam, quæ cum Perimetro faciat Angulum Contactûs, vel rectum vel quemcumque datum. Scilicet, *Ex dato Puncto ducere ad Curvas Tangentem, vel Perpendicularem, vel Rectam quomodocumque inclinatam.*

IV.

Ex Puncto dato intra Parabolam ducere Lineam rectam, facientem cum Perimetro omnium maximum vel minimum Angulum. Et idem facere in Curvis quibuslibet.

V.

Rectam ducere, quæ tangat duas Curvas positione datas, aut unam eandémque in duobus Punctis; ubi id fieri potest.

VI.

Curvam sub Legibus datis describere, quæ aliam Curvam positione datam tangat in dato Puncto.

VII.

Determinare Refractionem Lucis Radii, qui cadit in quamcumque Curvam Superficiem.

Resolutio horum & similium Problematum adeò difficilis non est (præter Computationis molestiam), ut hìc in iis moremur, & bene me Geometris consuluisse puto eorum mentionem solùm faciendo.

PROBL. V.

Determinare Quantitatem Curvaturæ, quam habet data quævis Curva in dato Puncto.

Pauca

Pauca sunt Problemata Curvas spectantia hoc elegantiora, & quæ penitiùs earum naturam detegant. Ad hujus Resolutionem præmitto sequentia generalia.

I.

Idem Circulus ubique eandem habet Curvaturam, & in diversis Circulis ea est in reciprocâ Diametrorum Ratione. Si Diameter unius Circuli subdupla est Diametri Circuli aliûs, Curvatura primi erit dupla Curvaturæ secundi. Si primi Diameter est subtripla Diametri secundi, Curvatura primi erit tripla Curvaturæ secundi, &c.

II.

Si Circulus tangat Curvam in ejus parte concavâ ad datum Punctum, & ejusmodi magnitudinis sit, ut nullus alius Circulus tangens, possit describi intra Angulum hujus Contactûs, Circulus ille eandem habebit Curvaturam ac Curva in Contactûs Puncto. Nam, Circulus, qui descriptus esset inter Curvam & alium Circulum per Punctum Contactûs, minùs differret â Curvâ quàm alter Circulus, & magis quàm ille, accederet ad Curvæ illius Curvaturam. Ergo ejus Curvaturæ proximus omnium est Circulus ille, inter quem & Curvam nullus alius Circulus describi potest.

III.

Quapropter Centrum Curvaturæ, quam habet Curva in quolibet Puncto, est Centrum Circuli æquè curvi; & ideo Radius vel semidiameter Curvaturæ, est Rectæ perpendicularis ad Curvam pars intercepta inter Curvam & Centrum hoc.

IV.

Et Ratio Curvaturæ in diversis Punctis noscetur ex Ratione Curvaturæ Circulorum æquè curvorum ac Curva in Punctis illis, aut ex reciprocâ Ratione Radii Curvaturæ.

 Igitur

Igitur Problema versatur in hoc, ut reperiatur Radius aut Centrum Curvaturæ.

TAB. III. Quamobrem concipe, quòd (*Fig.* 18.) ad tria Curvæ Puncta δ, D, & d actæ sunt Perpendiculares, quarum quæ sunt ad δ, & D, conveniunt in H, quæ verò ad D, & d, in h; ac Punctum D sit inter Puncta δ & d: Si Curvatura major est versùs Dδ quàm versùs Dd, erit DH minor quàm dh. Sed, quo magis Perpendiculares δH, & dh, accedunt mediæ Perpendiculari DH, eo minùs distant Puncta H, & h; & denique, cùm hæ Perpendiculares coëunt, coïncidunt etiam hæc Puncta: Coïncidant igitur in C; erit illud Curvaturæ Centrum ad Curvæ Punctum D, in quo Perpendiculares consistunt. Quod per se patet.

Sed Punctum illud C plura habet Symptomata vel Proprietates, quæ non inutiles erunt ad illud determinandum.

I.

Ibi conveniunt Perpendiculares, quæ hinc inde sunt ab ipsâ DC, & ab illâ infinitè parum distant.

II.

Illud separat ac distinguit Intersectiones Perpendicularium, quæ utrimque sunt ad finitum & exiguum Intervallum, ita ut eæ, quæ sunt ad partem magis curvam Dδ, conveniant supra illud in H, & quæ ad minùs curvam Dd, infra illud in h.

III.

Si DC moveri intelligatur, & semper tamen sit Perpendicularis ad Curvam, ejus Punctum C, (excepto motu, quo accedit vel recedit à Puncto Insistentiæ C,) omnium minimè movetur, quin est quasi Centrum Motûs.

IV. Si

IV.

Si Centro C & Radio CD Circulus describatur, nullus alius Circulus agi potest per Punctum Contactûs inter hunc & Curvam.

V.

Denique, si Centrum H aut h alterius Circuli tangentis, gradatim accedat ad illius Centrum C, donec tandem cum eo coeat, tunc quodcumque Punctum, in quo hic Circulus Curvam secat, coïncidet cum D Puncto Contactûs.

Hæ Proprietates singulæ aperire possunt viam ad Problema pluribus modis solvendum: Nos autem ex his primam eligemus, velut simpliciorem.

Ad quodcumque (*Fig.* 19.) Curvæ Punctum D agantur DT Tangens, & DC Perpendicularis; & Sit C Centrum Curvaturæ, ut antea. Præterea, sit AB Abscissa, cui BD applicatur ad rectos Angulos, & quam DC secat in P. Age DG parallelam AB, & GC ei perpendicularem, ex quâ abscinde Cg cujusvis datæ magnitudinis, & ad eam age perpendicularem $g\delta$, quæ secet ipsam CD in δ. Tunc erit $Cg : g\delta ::$ (BT : BD ::) Fluxio Abscissæ ad Fluxionem Ordinatæ. Pariter, intellige Punctum D infinitè parum progredi in Curvâ usque ad d; & actâ de ad rectos Angulos ipsi DG, ac Cd perpendiculari ad Curvam, Cd secet DG in F, & $g\delta$ in f. Erunt De Momentum Abscissæ, de Momentum Ordinatæ, & δf eodem tempore subortum Momentum Rectæ $g\delta$. Quapropter $DF = De + \frac{de \times de}{De}$. Cùm igitur habeas Rationes horum Momentorum, aut, (quod idem est,) Fluxionum Momenta hæc generantium, habebis Rationem ipsius CG ad datam Lineam Cg, (quæ eadem est ac Ratio ipsius DF ad δf,), & hinc determinabitur Punctum C.

TAB. III.

Sit igitur $AB = x$, $BD = y$, $Cg = 1$, & $g\delta = z$; erit $1 : z :: \dot{x} : \dot{y}$, aut $z = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Jam δf Momentum ipsius z sit $o \times \dot{z}$, (id

eſt Factum ex Velocitate in infinitè exiguam Quantitatem o,) erunt ideo Momenta $De = o \times \dot{x}$, $de = o \times \dot{y}$, & idcirco $DF = o\dot{x} + \frac{o\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}}$: Quâ de cauſâ eſt $Cg(1)$: CG :: (δf: DF ::) $o\dot{z}$: $o\dot{x} + \frac{o\dot{y}\dot{y}}{\dot{x}}$; id eſt, $CG = \frac{\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}}{\dot{x}\dot{z}}$.

Et quia licet ex arbitrio tribuere quamcumque Velocitatem Fluxioni Abſciſſæ x, (ad quam, tanquam ad æquabilem Fluxionem, ceteræ poſſunt referri) fac $\dot{x} = 1$, & idcircò $\dot{y} = z$, & $CG = \frac{1+zz}{\dot{z}}$, ergo $GD = \frac{z+z^3}{\dot{z}}$, & $DC = \frac{\overline{1+zz} \times \sqrt{1+zz}}{\dot{z}}$.

Propoſitâ igitur Æquatione, quæ contineat Relationem inter DB & BA, ad Curvam definiendam, primò quære Relationem, quæ eſt inter $\dot{x}$, & $\dot{y}$, per Probl. I., & eodem tempore pone 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$. Deinde ex Æquatione hinc proveniente, per idem Probl. I.; excude Relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$, & ſimul ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$, ut antea. Hoc pacto prima Operatio dabit valorem ipſiùs z, & ſecunda $\dot{z}$; quibus inventis, produc BD in H, concavam Curvæ partem verſùs, ita ut $DH = \frac{1+zz}{\dot{z}}$; & age HC parallelam AB, quæ ſecet Perpendicularem CD in C; erit C Centrum Curvaturæ, quâ Curva gaudet in D. Vel, quia eſt $1 + zz = \frac{PT}{BT}$, ſume $DH = \frac{PT}{\dot{z} \times BT}$, aut $DC = \frac{DP^3}{\dot{z} \times DB^3}$.

EXEMPL. I.

Sic Æquatione $ax + bxx - yy = 0$ propoſitâ, (quæ eſt ad Hyperbolam, cujus Latus rectum eſt a, tranſverſum autem $\frac{a}{b}$,), habebi-

habebimus (per Probl. I.) $a+2bx-2zy=0$, (ponendo scilicet 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$ in Æquatione proveniente, quæ ceteroquin esset $a\dot{x}+2bx\dot{x}-2y\dot{y}=0$), & hinc iterum exsurget $2b-2zz-2y\dot{z}=0$, (rursus 1 & z scriptis pro $\dot{x}$ & $\dot{y}$,): Ex primâ reperies $z=\frac{a+2bx}{2y}$, & ex alterâ $\dot{z}=\frac{b-zz}{y}$. Quapropter, aliquo Puncto D in Curvâ dato, & propterea datis x & y, hinc dabuntur z & $\dot{z}$; quibus cognitis, abscinde CG vel DH $=\frac{1+zz}{\dot{z}}$, & age HC.

Si in Numeris ponas $a=3$, & $b=1$ ita ut $3x+xx=yy$, exprimat naturam Hyperbolæ. Et si assumas $x=1$, erit $y=2$, $z=\frac{5}{4}$ & $\dot{z}=-\frac{9}{32}$, & DH $=-9\frac{1}{9}$. Jam, reperto Puncto H, educ Perpendicularem HC, quæ secet Perpendicularem CD, antea ductam, aut (quod idem est) fac DH : HC :: (1 : z ::) 1 : $\frac{5}{4}$, eritque juncta CD Radius Curvaturæ.

Cùm arbitraris Computationem non nimis perplexam futuram, substituere potes indefinitos valores ipsarum $\dot{z}$, & z, in $\frac{1+zz}{\dot{z}}$, quæ exponit valorem ipsius CG. Hoc pacto in præsenti Exemplo habebis per debitam Reductionem DH $=y+\frac{4y^3+4by^3}{aa}$. Tamen valor ipsius DH à computatione præbetur negativus, ut videre potes in Exemplo Numerali. Quod negotium solùm indicat ipsam DH capiendam esse B versùs; Si enim valor ipse foret affirmativus, Recta illa sumenda esset contrarias partes versùs.

COROLL. I.

Hinc, Si signum præfixum symbolo $+b$ mutetur, ut fiat $ax-bxx-yy=0$, (Æquatio ad Ellipsim,) hinc assequeremur DH$=\frac{4y^3-4by^3}{aa}+y$.

COROLL. II.

Sed si $b = 0$, quo pacto Æquatio evaderet $ax - yy = 0$, (quæ spectat ad Parabolam,) tunc DH esset $= y + \frac{4y^3}{aa}$, & hinc DG $= \frac{1}{2}a + 2x$.

COROLL. III.

Ex his expressionibus facilè confici potest, quòd Radius Curvaturæ pro quâlibet Sectione conicâ semper est $\frac{4DP^3}{aa}$.

EXEMPL. II.

Si daretur $x^3 = ayy - xyy$, (quæ Æquatio pertinet ad Cissoïdem DIOCLIS;) per Probl. I., esset primò $3xx = 2az\dot{y} - 2xz\dot{y} - yy$, & deinde $6x = 2ay\dot{z} + 2azz - 2zy - 2xy\dot{z} - 2xzz - 2zy$, ergo $z = \frac{3xx + yy}{2ay - 2xy}$, & $\dot{z} = \frac{3x - azz + xzz + 2zy}{ay - xy}$. Quocirca, dato aliquo Puncto in Cissoïde, & propterea datis x & y, dabuntur quoque z & $\dot{z}$; quibus cognitis, abscinde CG $= \frac{1 + zz}{\dot{z}}$.

EXEMPL. III.

Si $\overline{b + y} \times \sqrt{cc - yy} = xy$, (quam Æquationem spectare ad Conchoïdem jam invenimus, pag. 91. hujus,) fac $\sqrt{cc - yy} = u$, unde orietur $bu + uy = xy$. Nunc harum Æquationum prima, (videlicet $cc - yy = uu$,) dat (per Probl. I.) $-2y\dot{y} = 2u\dot{u} = -2yz$, (scribendo z pro $\dot{y}$), altera verò præbet $b\dot{u} + y\dot{u} + zu = y + xz$. Hæ Æquationes rectè dispositæ determinabunt $\dot{u}$ & $\dot{z}$:

Ut

Ut autem inveniatur etiam $\dot z$, extermina ex ultimâ Æquatione Fluxionem $\dot u$, fubftituendo $-\frac{y\dot z}{u}$, unde fiet $-\frac{byz}{u}-\frac{yyz}{u}+uz = y+xz$, Æquatio, quæ folas complectitur Quantitates fluentes abfque Fluxionibus, ut requirit Solutio primi Problematis. Quapropter hinc, per Probl. I., habebis $-\frac{bzz}{u}-\frac{by\dot z}{u}+\frac{byz\dot u}{uu}-\frac{2yzz}{u}-\frac{yy\dot z}{u}+\frac{yyz\dot u}{uu}+u\dot z+z\dot u = 2z+x\dot z$. Hæc autem Æquatio reducta & in ordinem difpofita dabit $\dot z$. Datis autem z & $\dot z$; fume $GC = \frac{1+zz}{\dot z}$.

Si hanc Æquationem ultimam divififfes folùm per z, tunc, per Probl. I., habuiffes $-\frac{bz}{u}+\frac{by\dot u}{uu}-\frac{2yz}{u}+\frac{yy\dot u}{uu}+\dot u = z-\frac{y\dot z}{zz}$, quæ Æquatio definiens $\dot z$, fimplicior fuiffet illâ quam inveneramus.

Hoc Exemplum tradidi, ut videre poffes quomodo perficienda eft Operatio, cùm dantur Æquationes implicatæ Quantitatibus furdis: Alioquin Curvatura Conchoïdis inveniri poffet breviori ratione, fic: Partes Æquationis $\overline{b+y}\times\sqrt{cc-yy}=xy$ quadratæ & divifæ per yy, præbent $\frac{bbcc}{yy}+\frac{2bcc}{y}+cc-bb-2by-yy=xx$; ergo, per Probl. I., $-\frac{2bbccz}{y^3}-\frac{2bccz}{yy}-2bz-2yz=2x$, vel $-\frac{bbcc}{y^3}-\frac{bcc}{yy}-b-y=\frac{x}{z}$; & hinc, rurfum per Probl. I., $\frac{3bbccz}{y^4}+\frac{2bccz}{y^3}-z=\frac{1}{z}-\frac{x\dot z}{zz}$. Per quarum primam determinatur z; & $\dot z$ per fecundam.

EXEM-

EXEMPL. IV.

TAB. IV. Sit (*Fig.* 20.) ADF Trochoïs, (vel Cycloïs,) pertinens ad Circulum ALE, cujus Diameter eſt AE; & poſito quòd Ordinata BD Circulo occurrat in L, dic $AE = a$, $AB = x$, $BL = u$, $BD = y$, & Arcum $AL = t$, ac Fluxionem ejuſdem Arcûs $= \dot{t}$. Et primò, (ductâ ſemidiametro PL,) erit Fluxio Baſeos aut Abſciſſæ AB ad Fluxionem Arcûs AL, ut BL ad LP, id eſt, $\dot{x}$ vel $1 : \dot{t} :: u : \frac{1}{2}a$; igitur $\frac{a}{2u} = \dot{t}$. Jam, ex Circuli naturâ, eſt $ax - xx = uu$, & idcirco, per Probl. I., $a - 2x = 2u\dot{u}$, vel $\frac{a - 2x}{2u} = \dot{u}$.

Præterea, ob Trochoïdis naturam, eſt LD æqualis Arcui LA, id eſt, $u + t = y$: Unde (per Probl. I.) $\dot{u} + \dot{t} = z$: Denique, pro Fluxionibus $\dot{t}$ & $\dot{u}$ ſcribe earum valores, & obtinebis $\frac{a - x}{u} = z$: Et hinc (per Probl. I.) erues $-\frac{a\dot{u}}{uu} + \frac{x\dot{u}}{uu} - \frac{1}{u} = \dot{z}$. Quibus inventis abſcinde $- DH = \frac{1 + zz}{\dot{z}}$, & age Perpendicularem HC.

COROLL. I.

Hinc ſequitur, quòd $DH = 2BL$, & $HC = 2BE$, aut, quòd EF biſecat CD Radium Curvaturæ in N. Quod patebit ſubſtituendo valores ipſarum z & $\dot{z}$, nuper inventos in Æquatione $\frac{1 + zz}{\dot{z}} = DH$, & aptè reducendo quod hinc conficitur.

COROLL. II.

Quamobrem, Curva FCK indefinitè deſcripta à Centro Curvaturæ

turæ ipsius ADF est altera Trochoïs huic æqualis, cujus Vertices ad I & F tangunt hujus Cuspides. Sit enim Circulus F λ æqualis Circulo ALE & similiter positus; & C β parallela ipsi EF ducatur occurrens Circulo in λ, erit Arcus F λ æqualis (Arcui EL, qui æquat Rectam FN, quæ est æqualis) C λ.

COROLL. III.

Recta eadem CD, quæ ad rectos Angulos insistit Trochoïdi IAT, tangit Trochoïdem IKF in Puncto C.

COROLL. IV.

Hinc, si (in inversis Trochoïdibus) Cuspidi K superioris Trochoïdis appendatur pondus filo ad intervallum KA vel 2EA, & filum supponatur semet, (dum pondus oscillat,) applicare partibus Trochoïdis FK, & KI, quæ hinc inde prohibent ne filum extendatur in rectâ Lineâ, sed illud compellunt, (simul ac à Perpendiculari discessit,) ad se gradatim inflectendum sursum & ad mutuandam Trochoïdis figuram, dum ejus inferior pars CD infra ultimum Punctum Contactûs semper manet in Lineâ rectâ, pondus hoc movebitur in Perimetro Trochoïdis inferioris; est enim filum ei semper ad rectos Angulos.

COROLL. V.

Ergo tota Longitudo fili KA æqualis est Perimetro Trochoïdis KCF, ejúsque pars CD æqualis ipsi CF parti hujus Perimetri.

COROLL. VI.

Quia filum oscillans movetur circa Punctum mobile C, tanquam circa Centrum; superficies, quam tota Linea CD indesinenter percurrit, est ad superficiem, quam pars CN supra Rectam IF peragrat per idem Tempus, ut CD^2 ad CN^2, scilicet ut 4 ad 1. Est ergo

 Area

Area CFN ſubquadrupla Areæ CFD; & Area KCNE ſubquadrupla Areæ AKCD.

Coroll. VII.

Item, quia Subtenſa EL æqualis eſt & parallela ipſi CN, & convertitur circa immobile Centrum E, ad amuſſim, ut CN convertitur circa mobile Centrum C, Superficies, quas eodem Tempore ambæ deſcribunt, æquales erunt, id eſt, Area CFN æquabit Circuli ſegmentum EL: Quocirca Area NFD æquabit ter ſegmentum illud, & tota Area EADF erit tripla ſemicirculi.

Coroll. VIII.

Cùm pondus D pervenit ad Punctum F, totum filum circumvolutum fuit Trochoïdis Perimetro KCF, & Radius Curvaturæ in nihilum evanuit. Quapropter Trochoïs IAF ad Cuſpidem F magis curva eſt, quàm Circulus quilibet, & cum Tangente Fβ producta, facit Angulum Contactûs infinitè majorem illo quem Circulus quivis facere poteſt cum rectâ Lineâ.

Sed dantur Anguli Contactûs qui ſunt infinitè majores, quàm quilibet ex iis, quos facit Trochoïs, & alii rurſùs his infinitè majores, & ſic in infinitum; attamen eorum maximus infinitè minor eſt Angulis Rectilineis. Sic $xx = ay$, $x^3 = byy$, $x^4 = cy^3$, $x^5 = dy^4$, &c., exprimunt Seriem Curvarum, quarum ſingulæ ſucceſſivè faciunt cum Abſciſſâ Angulos Contactûs infinitè majores omnibus iis, quos Curvæ præcedentes facere poſſunt cum eâdem Abſciſſâ. Anguli autem Contactûs, quos prima Curva expoſita per Æquationem $xx = ay$ facit, ſunt ejuſdem generis ac Circulares; & quos ſecunda $x^3 = byy$ ſunt ejuſdem generis ac Trochoïdales. Ac, tametſi Anguli Curvarum poſteriorum ſemper infinitè excedant Angulos præcedentium, tamen nunquam pervenire poſſunt ad magnitudinem Anguli rectilinei.

Eodem pacto Æquationes $x = y$, $xx = ay$, $x^3 = bby$, $x^4 = c^3y$, &c. denotant Seriem Linearum, quarum ſubſequentes fa-

ciunt

ciunt ad vertices cum Abſciſſis Angulos infinitè minores, iis quos faciunt præcedentes. Et quidem poſſunt inter Angulos Contactûs, quos faciunt duo ex his Curvarum generibus, fieri alii Anguli Contactûs ad infinitum, quorum alii aliis infinitè majores ſint.

Jam patet, quòd Anguli Contactûs unius generis ſunt infinitè majores, quàm Anguli cujuſvis alterius generis; quoniam Curva unius generis, quantùmvis magna ea ſit, tranſire nequit per Punctum Contactûs inter Tangentem & Curvam alterius generis quantumvis exigua ea ſit. Aut Angulus Contactûs unius generis neceſſariò nequit continere Angulum Contactûs alterius generis, ut totum partem continet. Sic, Angulus Contactûs Curvæ $x^4 = cy^3$, aut Angulus, quem ea facit cum Abſciſſâ, neceſſariò includit Angulum Contactûs Curvæ $x^3 = byy$, & nunquam in illo contineri poteſt: Nam Anguli, qui ſeſe mutuò poſſunt excedere, ſunt ejuſdem generis; ut accidit ſupra dictis Angulis Trochoïdis, & Curvæ, cujus natura exponitur per Æquationem $x^3 = byy$.

Et hinc apparet, quòd Curvæ poſſunt in aliquibus Punctis eſſe infinitè magis rectæ, vel infinitè magis curvæ, quàm Circulus quilibet, tametſi non ideò amittant formam Curvarum. Sed hæc tantùm obiter.

EXEMPL. V.

Sit (*Fig.* 21.) ED Quadratrix Circuli deſcripti Centro A; &, TAB. III. demiſſâ DB perpendiculari ad AE, pone $AB = x$, $BD = y$, & $AE = 1$. Tunc erit $x\dot{y} - yy\dot{y} - xx\dot{y} = y\dot{x}$; ut antea. Jam ſcribe, 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$, & Æquatio evadet $xz - yyz - xxz = y$; & hinc, per Probl. I; habebis $z\dot{x} + x\dot{z} - yy\dot{z} - 2zy\dot{y} - xx\dot{z} - 2zx\dot{x} = \dot{y}$. Hinc autem, reducendo & rurſùs ponendo 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$, erues $\dot{z} = \frac{2zzy + 2zx}{x - xx - yy}$. Et, cùm jam inveneris z & $\dot{z}$, fac $\frac{1 + zz}{\dot{z}} = DH$, & age HC, ut ſupra.

 Si

Si quæris Problematis Constructionem, eam valdè expeditam invenies. Age DP ad rectos Angulos ipsi DT, & quæ secet in P ipsam AT, & fac 2AP : AE :: PT : CH. Est enim $z = (\frac{y}{x - xx - yy} =) \frac{BD}{-BT}$, & $zy = \frac{BDq}{-BT} = -BP$, ac $zy + x = -AP$, atque $\frac{2z}{x - xx - yy}$ in $zy + x = \frac{2BD}{AE \times BTq}$ in $-AP = z$. Præterea, est $1 + zz = \frac{PT}{BT}$, (est enim $= 1 + \frac{BDq}{BTq} = \frac{DTq}{BTq}$), & propterea $\frac{1 + zz}{z} = \frac{PT \times AE \times BT}{-2BD \times AP} = DH$. Denique est BT : BD :: DH : $HC = \frac{PT \times AE}{-2AP}$. Ubi negativus valor tantùm ostendit, quòd CH sumi debet ex DH ad easdem partes ac AB.

Eâdem ratione determinari potest brevissimâ Computatione, Curvatura Spiralium, & aliarum Curvarum quarumcumque.

Quinimò hæc Methodus, (ut jam supra fecimus pro Tangentibus ducendis,) accomodari potest ad determinandam sine prævià Reductione Curvaturam, quando Curvæ referuntur ad Rectas quovis alio pacto. Sed, quia omnes Curvæ, tùm geometricæ tùm etiam mechanicæ, (præcipuè cùm leges definientes expressæ sunt per Æquationes infinitas, ut infra monstrabimus,) referri possunt ad Ordinatas perpendiculares, ideò me satis de hâc re dixisse puto.

Quæ præterea desiderari possent, facilè quisque proprio ingenio supplere potest; præsertim, postquam ad meliùs hoc argumentum illustrandum, addidero Methodum pro spiralibus.

TAB. IV. Sit (*Fig.* 22.) BK Circulus, A ejus Centrum, & B Punctum datum in Peripheriâ. Sit AD*d* Spiralis quælibet, DC ei ad rectos Angulos, & C Centrum Curvaturæ in Puncto D: Actâ Rectâ ADK, duc CG ei parallelam & æqualem, & insuper Perpendicularem GF, quæ secet ipsam CD in F. Dic AB vel AK $= 1 =$ CG, BK $= x$, AD $= y$, & GF $= z$. Jam concipe Punctum D progredi in Spirali per infinitè exiguum Spatium D*d*; deinde per *d* age Semidiametrum A*k*, ac per C Rectam C*g* Semidiametro A*k* parallelam & æqualem, ac *gf* ipsi *g*C ad rectos Angulos. Juncta autem

autem Cd secet gf in f & GF in P; produc GF in ϕ, ita ut sit $G\phi = gf$, & age de perpendicularem ad AK, quam produces donec secet CD in I. Jam eodem tempore genita Momenta ipsarum BK, AD, & $G\phi$ erunt Kk, De, & Fϕ; quæ idcirco vocanda sunt $o\dot{x}$, $o\dot{y}$, & $o\dot{z}$.

Nunc est AK : Ae (AD) :: Kk : $de = o\dot{y}$, ubi assumo $\dot{x} = 1$, ut anteà. Pariter CG : GF :: de : eD $= o\dot{y}z$, & idcirco $\dot{y}z = \dot{\overline{y}}$. Præterea, CG : CF :: de : dD $= o\dot{y} \times$ CF :: Dd : dI $= o\dot{y} \times$ CFq. Insuper, quia Angulus PCϕ, (æqualis Angulo GCg,) æquat Angulum DAd; & Angulus CPϕ, (par Angulo CDI, æquali Angulis edD & Recto simul,) æquat Angulum ADd; Triangula CPϕ & ADd similia sunt, ergo AD : Dd :: CP (CF) : P$\phi = o \times$ CFq: Hinc aufer Fϕ, & restabit FP $= \dot{o} \times$ CFq $- \dot{o} \times \dot{z}$. Denique, demissâ CH perpendiculari ad AD, est FP : dI :: CG : eH vel HD $= \dfrac{\dot{y} \times \text{CF}q}{\text{CF}q - \dot{z}}$, aut, substituendo $1 + zz$ pro CFq, invenies DH $= \dfrac{\dot{y} + \dot{y}zz}{1 + zz - \dot{z}}$. Ubi observandum est, quòd, in hoc Computationis genere, pro æqualibus sumo Quantitates, quarum, (velut hìc ipsarum AD & Ae,) Ratio infinitè parum differt ab Æqualitatis Ratione.

Hinc autem manat sequens Regula. Cùm habes Æquatione expositam Relationem ipsarum x & y, quære Relationem Fluxionum $\dot{x}$ & $\dot{y}$ (per Probl. I.), & pone 1 pro $\dot{x}$ & $\dot{y}z$ pro $\dot{\overline{y}}$: Deinde ex Æquatione sic inventâ rursus (per Probl. I.) erue Relationem inter $\dot{x}$, $\dot{y}$, & $\dot{z}$, atque iterum scribe 1 pro $\dot{x}$: Quod primò conficitur, per debitam Reductionem dabit $\dot{y}$ & z; &, quod secundò fit, dabit $\dot{z}$; quibus cognitis, sume DH $= \dfrac{\dot{y} + \dot{y}zz}{1 + zz - \dot{z}}$, & educ Perpendicularem HC, quæ occurrit in C ipsi DC Perpendiculari ad Spiralem anteà ductæ, eritque C Centrum Curvaturæ. Vel, (quod eodem recidit,) fac CH : HD :: $\dot{z}$: 1, & age CD.

EXEMPL. I.

Sit Æquatio $ax = y$, (quæ pertinet ad Spiralem *Archimedæam*), erit (per Probl. I.) $a\dot{x} = \dot{y}$, aut, (scriptis 1 pro $\dot{x}$, & yz pro $\dot{y}$,) $a = yz$. Et hinc rursus (per Probl. I.) $0 = z\dot{y} + y\dot{z}$: Quapropter dato in Spirali quovis Puncto D, & ideò Rectâ AD vel y datâ magnitudine, dabuntur etiam $z = \frac{a}{y}$, & $\dot{z} = (-\frac{z\dot{y}}{y}$ aut$)$ $-\frac{az}{y}$: Quibus cognitis, fac $1 + zz - \dot{z} : 1 + zz :: AD(y) : DH$; & $1 : z :: DH : HC$.

Hinc sponte fluit Constructio hæc. Produc AB in Q, ita ut sit AB ad Arcum BK, ut Arcus BK ad BQ, & fac $AB + AQ : AQ :: AD : DH :: a : HC$.

EXEMPL. II.

Si $axx = y^3$ esset Æquatio determinans Relationem, quæ est inter BK & AD, haberes (per Probl. I.) $2ax\dot{x} = 3yy\dot{y}$, aut $2ax = 3y^3z$, & hinc rursus $2a\dot{x} = 3y^3\dot{z} + 9zyy\dot{y}$; est igitur $z = \frac{2ax}{3y^3}$, & $\dot{z} = \frac{2a - 9zzy^3}{3y^3}$: His autem cognitis, fac $1 + zz - \dot{z} : 1 + zz :: AD : DH$. Sive, opere ad optimam formam redacto, fac $9xx + 10 : 9xx + 4 :: AD : DH$.

EXEMPL. III.

Eodem pacto, si Relatio ipsarum BK, AD definiretur Æquatione $axx - bxy = y^3$, invenires $\frac{2ax - by}{bxy + 3y^3} = z$, & $\frac{2a - 2bzy - bzzxy - 9zzy^3}{bxy + 3y^3} = \dot{z}$. Unde DH, & deinde Punctum C determinabuntur, ut suprà.

Et hâc ratione facilè determinabitur Curvatura quarumlibet aliarum

rum Spiralium, aut invenientur Regulæ pro quibuſcumque aliis Curvarum generibus, ad imitationem Regularum quas hactenus tradidimus.

Jamque perfecimus Problema hoc; ſed, cùm uſi ſimus Methodo ſatis diverſâ à vulgaribus Methodis, & cùm Problema ipſum ſit ex iis, quæ rariuſculè apud Geometras occurrunt, me rem ſupervacaneam facturum non exiſtimo, ſi ad illuſtrandam & confirmandam Solutionem allatam, tradam Specimen alterius; quæ magis obvia eſt, & minùs differt à vulgari Tangentium ducendarum Methodo. Concipiatur ergo Circulus deſcriptus quovis Centro, & quovis Radio, ita ut ille Curvam ſecet in pluribus Punctis; Circulus ille, ſi contrahi aut dilatari intelligatur, donec duo ex his interſectionis Punctis coïncidant, ibi tanget Curvam. Et præterea, ſi ejus Centrum ſupponatur accedere ad Punctum Contactûs, aut ab eo recedere ut tertium interſectionis Punctum coeat cum primo in ipſo Contactûs Puncto; Circulus ille erit æquè curvus ac Curva in eodem Contactûs Puncto, ut innui in ultimâ ex quinque Centri Curvaturæ Proprietatibus ſupra allatis, & quarum quamlibet aſſerui viam aperire ad diverſimode Problema ſolvendum.

Quapropter (*Fig.* 23.) Centro C, Radio CD, deſcribatur Circulus ſecans Curvam in Punctis d, D, & δ; & demiſſis Perpendicularibus db, DB, $\delta\beta$, ac CF ad Abſciſſam AB. Dic $AB = x$, $BD = y$, $AF = u$, $FC = t$, & $CD = s$. Tunc erunt $BF = u - x$, & $BD + FC = y + t$. Summa Quadratorum ex his æquat Quadratum ex DC, id eſt, $uu - 2ux + xx + yy + 2ty + tt = ss$; quam expreſſionem breviorem ſi reddere velis, pone $uu + tt - ss = qq$ (ſymbolo ad arbitrium ſumpto), & Æquatio ſuperior fiet $xx - 2ux + yy + 2ty + qq = 0$. Nunc, poſtquam determinaveris t, u, & qq, habebis $s = \sqrt{uu + tt - qq}$. TAB. IV.

Jam proponatur Æquatio quæcunique ad definiendam Curvam, cujus Curvatura petitur. Hujus Æquationis ope potes ad arbitrium exterminare alterutram ex Quantitatibus x & y, & hinc prodibit Æquatio, cujus Radices, (db, DB, $\delta\beta$, ſi extermines x; & Ab, AB, Aβ, ſi extermines y,) ſunt ad interſectionis Puncta d, D, δ, &c. Harum tres cùm æquales evadunt, Circulus Curvam tangit, & præterea eundem habet Curvaturæ gradum ac Curva in

Con-

Contactûs Puncto. Tres autem Radices æquales fient, si conferas hanc Æquationem cum alterâ fictitiâ eundem Dimensionum numerum & tres Radices æquales habente, ut jam CARTESIUS monstravit. Aut expeditiùs, si bis multiplices ejus Terminos per aliquam arithmeticam Progressionem.

EXEMPLUM.

Sit Æquatio $ax = yy$, (quæ est ad Parabolam). Exterminato x (id est, posito in superiore Æquatione pro x ejus valore $\frac{yy}{a}$), consequeris aliam hic infra positam, cujus Radices tres y restant æquales reddendæ. Ad quod perficiendum multiplico bis ejus Terminos, per Progressionem aliquam arithmeticam, ut hic factum vides.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{y^4}{aa} & * & -\frac{2u}{a}yy & +2ty & +qq & =0 \\ & & +yy & & & \\ 4 & * & 2 & 1 & 0 & \\ 3 & * & 1 & 0 & -1 & \\ \hline \end{array}$$

Hinc assequor $\frac{12y^4}{aa} \quad - \frac{4u}{a}yy + \quad 2yy \quad = 0$

aut $u = \frac{3yy}{a} + \frac{1}{2}a$, unde facilè infertur, quòd $BF = 2x + \frac{1}{2}a$, ut antea.

Dato igitur Puncto aliquo D in Parabolâ, age DP perpendicularem ad Curvam, & sume in Axe $PF = 2AB$, erige FC ad rectos Angulos ipsi AF, quæ occurrat DP in C; erit C petitum Curvaturæ Centrum.

Idem perfici potest in Ellipsi & Hyperbolâ, sed computatio erit satis perplexa, &, in genere, pro aliis Curvis valde molesta.

De

De Quæstionibus quæ habent affinitatem quamdam cum Superiore Problemate.

Ex Refolutione fuperioris Problematis nonnulla alia poffunt enodari, talia funt.

I.

Invenire punctum, in quo Curva datum habet Curvaturæ gradum.

Quæratur, *ex. gr.*, in Parabolâ $ax = yy$ punctum, in quo Radius Curvaturæ fit datæ longitudinis f: Invento, ut fupra, Centro Curvaturæ, determinabis Radium, quem invenies $= \frac{\overline{a + 4x}}{2a} \times \sqrt{aa + 4ax}$; debet autem effe $= f$, ergo per Reductionem erit $x = -\frac{1}{4}a + \sqrt[3]{\frac{1}{16}aff}$.

II.

Invenire punctum Rectitudinis.

Punctum *Rectitudinis* voco illud, in quo Radius Curvaturæ eft infinitus, aut ejus Centrum ad infinitum intervallum. Hoc accidit ad Verticem Parabolæ $a^3x = y^4$. Illud idem punctum plerumque eft Limes Flexûs contrarii, cujus determinationem fupra tradidimus; fed alia determinatio nec inelegans deduci poteft ex hoc Problemate; fcilicet: Quo major fit Radius Curvaturæ, eo minor (*Fig.* 19.) evadit Angulus D C d, & fimul Momentum δf; ita ut Fluxio Quantitatis z minuatur cum illo, &, cùm Radius eft infinitus, omnino evanefcat. Quapropter quære Fluxionem $\dot{z}$, & eam pone æqualem nihilo.

TAB. III.

Ut, fi velles determinare Limitem Flexûs contrarii in Parabolâ fecundi generis, cujus ope CARTESIUS conftruit Æquationes fex

Dimensionum. Æquatio autem ad hanc Curvam est $x^3 - bxx - cdx + bcd + dxy = 0$. Hinc (per Probl. I.) oritur $3x\dot{x}x - 2bx\dot{x} - cd\dot{x} + dy\dot{x} + dx\dot{y} = 0$, quæ Æquatio, (scribendo 1 pro $\dot{x}$, & z pro $\dot{y}$,) evadit $3xx - 2bx - cd + dy + dxz = 0$; unde rursus (per Probl. I.) $6x\dot{x} - 2b\dot{x} + d\dot{y} + dz\dot{x} + dx\dot{z} = 0$; hic iterum pone 1 pro $\dot{x}$ & z pro $\dot{y}$ & o pro $\dot{z}$, & habebis $6x - 2b + 2dz = 0$: Scribe in Æquatione $3xx - 2bx - cd + dy + dxz = 0$ pro dz ejus valorem $3x - b$, reperies $-bx - cd + dy = 0$, aut $y = c + \frac{bx}{d}$; qui valor, positus pro y in Æquatione ad Curvam, præbebit $x^3 + bcd = 0$, unde Limes Flexûs contrarii definietur.

Eodem pacto determinari possunt puncta Rectitudinis, quando non sunt inter partes contrariè flexas. Exprimat Æquatio $x^4 - 4ax^3 + 6aaxx - b^3y = 0$ naturam Curvæ. Hinc habebis (per Probl. I.) $4x^3 - 12axx + 12aax - b^3z = 0$; & hinc rursus $12xx - 24ax + 12aa - b^3\dot{z} = 0$. Jam suppono $\dot{z} = 0$, & per Reductionem assequor $x = a$. Abscindo igitur (*Fig.* 24.) AB $= a$, & erigo Perpendicularem BD, quæ Curvæ occurret in D, Puncto Rectitudinis, ut petebatur.

TAB. IV.

III.

Invenire Punctum Curvaturæ infinitæ.

Quære Radium Curvaturæ, eúmque pone æqualem nihilo. Sic, in Parabolâ secundi generis, cujus Æquatio est $x^3 = ayy$, Radius est CD $= \frac{4a + 9x}{6a} \times \sqrt{4ax + 9xx}$, qui in nihilum evanescit, quando $x = 0$.

IV. De-

I V.

Determinare Punctum maximæ, vel minimæ Curvaturæ.

In hisce Punctis Radius evadit omnium maximus, vel minimus; quapropter Centrum Curvaturæ in illo temporis momento, neque ad punctum Contactûs accedit, neque ab eo recedit: sed planè stat immobile. Igitur, (*Fig.* 25.,) inventâ Fluxione Radii CD, sive, breviùs, alterutrius BH vel AK, eam pone æqualem nihilo. TAB. IV.

Si Quæstio, *ex. gr.*, proponeretur de Parabolâ secundi generis $x^3 = aay$: Priùs determina Centrum Curvaturæ. Invenies autem $DH = \frac{aa + 9xy}{6x}$, &idcirco $BH = \frac{aa + 15xy}{6x}$; Pone $BH = u$, ergo $\frac{aa}{6x} + \frac{5}{2}y = u$; itaque (per Probl. I.) $-\frac{aa\dot{x}}{6xx} + \frac{5}{2}\dot{y} = \dot{u}$. Nunc suppone $\dot{u}$ vel Fluxionem ipsius BH æqualem nihilo, & præterea, (quia per hypothesim $x^3 = aay$, id est, per Probl. I. $3xx\dot{x} = aa\dot{y} = 3xx$, ponendo $\dot{x} = 1$,) ipsi $\dot{y}$ substitue $\frac{3xx}{aa}$, & reperies $45x^4 = a^4$. Itaque abscinde $AB = a\sqrt[4]{\frac{1}{45}} = a \times 45^{-\frac{1}{4}}$, & ex B educta Perpendicularis BD occurret Curvæ in Puncto maximæ Curvaturæ. Sive, quod idem est, fac $AB : BD :: 3\sqrt{5} : 1$.

Eadem ratione (*Fig.* 26.) Hyperbola secundi generis, repræsentata Æquatione $xyy = a^3$, maximè inflexa erit ad Puncta D & d, quæ determinabis capiendo Abscissam $AQ = 1$, erigendo hinc Perpendicularem $QP = \sqrt{5}$, & inde Qp ei æqualem, & demum jungendo AP, Ap, quæ Rectæ secabunt Curvam in quæsitis Punctis D & d. TAB. IV.

V.

Determinare locum Centri Curvaturæ, aut describere Curvam, in quâ semper est hoc Centrum.

Supra demonstravimus, quòd Centrum Curvaturæ Trochoïdis

ſemper invenitur in alterâ Trochoïde. Haud aliter Centrum Curvaturæ Parabolæ eſt in alterâ Parabolâ, ſed ſecundi generis, quæ exprimitur Æquatione $axx = y^3$, ut facilè computatio tibi monſtrabit.

VI.

Si Lux incidat in Curvam quamcumque, reperire Curvæ Focos, aut concurſum Radiorum, qui ab omnibus ejus Punctis Refringuntur.

Quære Curvaturam, quam habet Curva in hoc Puncto, ac Centro & Radio Curvaturæ deſcribe Circulum: Deinde quære concurſum Radiorum refractorum à Circulo circa hoc Punctum. Idem enim erit concurſus Radiorum refractorum à propoſitâ Curvâ.

Hic locus eſt addendi peculiarem Methodum determinandæ Curvaturæ ad Curvarum Vertices, quando eæ ſecant Abſciſſas ad rectos Angulos. Nam, Punctum, in quo Perpendicularis ad Curvam ſecans Abſciſſam, eam poſtremo ſecat eſt Centrum ipſum hujus Curvaturæ. Quare, cùm detur Relatio inter Abſciſſam x, & y Ordinatam, ad rectos Angulos connexas, atque ideo etiam (per Probl. I.) Relatio inter Fluxiones $\dot{x}$ & $\dot{y}$; valor ipſius $y\dot{y}$, poſtquam in eo poſueris 1 pro $\dot{x}$, & 0 pro y dabit Radium Curvaturæ.

Sic in Ellipſi $ax - \frac{a}{b}xx = yy$, eſt $\frac{a\dot{x}}{2} - \frac{a}{b}x\dot{x} = y\dot{y}$; qui valor $y\dot{y}$, (ſi ſupponas $y = 0$, & eâ de cauſâ $x = b$,) ſcribendo 1 pro $\dot{x}$, dat $\frac{1}{2}a$ æqualem Radio Curvaturæ. Eodem pacto ad Hyperbolæ & Parabolæ Vertices ſemper invenies Radium Curvaturæ æqualem ſemiſſi Lateris recti.

Eâdem ratione in Conchoïde definitâ per Æquationem $\frac{bbcc}{xx} + \frac{2bcc}{x} + cc - bb - 2bx - xx = yy$, valor $y\dot{y}$ (inventus per

Probl.

Probl. I.) erit $-\frac{bbcc}{x^3}-\frac{bcc}{xx}-b-x$: Nunc, supponendo $y=0$, & idcirco $x=+c$ vel $-c$, habebis $-\frac{bb}{c}+2b-c$ aut $\frac{bb}{c}-2b+c$ pro Radio Curvaturæ. Fac (*Fig.* 6.) igitur AE: EG:: EG: EC, & Ae: eG :: eG: ec, ac Puncta C & c, erunt Centra Curvaturæ ad Vertices E & e Conchoïdum conjugatarum. TAB. I.

PROBL. VI.

Determinare Qualitatem Curvaturæ ad datum Punctum cujuslibet Curvæ.

Per *Qualitatem* Curvaturæ intelligo ejus formam, ejus, scilicet, majorem vel minorem inæqualitatem, aut majorem vel minorem diversitatem in Curvæ partibus diversis. Sic, si quæras: Quænam est Qualitas Curvaturæ in Circulo? Respondeo quòd ea est uniformis vel invariabilis. Pariter, si quæratur quænam est Qualitas Curvaturæ in Spirali, quæ (*Fig.* 23.) describitur motu Puncti D progredientis in AD ex A Motu accelerato, dum Recta AK fertur uniformi rotatione circa Centrum A, & cujus Puncti D Velocitas ita acceleretur, ut Recta AD habeat ad Arcum BK descriptum ex dato puncto B eandem Rationem ac Numerus ad suum Logarithmum; si, inquam, peteretur quænam est Qualitas Curvaturæ hujus Spiralis, respondendum esset eam esse uniformiter variam vel æquabiliter inæqualem. Et sic aliæ Curvæ in diversis Punctis dici possunt inæquabiliter inæquales juxta diversitatem earum Curvaturæ. TAB. III.

Quæritur ergo Inæquabilitas aut Varietas Curvaturæ in singulis Curvæ Punctis: Ad quod observo.

I.

Quòd Curvæ, ubi similes sunt, habent in Punctis similiter positis similem Curvaturæ Inæquabilitatem aut Diversitatem.

II.

Quòd Momenta Radiorum Curvaturæ in his Punctis, sunt proportionalia eodem tempore natis Momentis Curvarum, & Fluxiones Fluxionibus.

III.

Quòd idcirco, ubi hæ Fluxiones non sunt proportionales, similis non est Inæquabilitas Curvaturæ.

Major enim est Inæquabilitas, quando major est Ratio quam Fluxio Radii Curvaturæ habet ad Curvæ Fluxionem; Quapropter hæc Fluxionum Ratio non ineptè dici potest *Index* Inæquabilitatis aut Varietatis Curvaturæ.

TAB. III. Ad Puncta (*Fig.* 19.) D & d infinitè proxima in Curvâ ADd, agantur Radii Curvaturæ DC & dc, &, si Dd sit Momentum Curvæ, erit Cc eodem tempore genitum Momentum Radii Curvaturæ, & $\frac{Cc}{Dd}$ Index Inæquabilitatis Curvaturæ: Nam, eo major dici potest hæc Inæquabilitas, quo major est Quantitas Rationis $\frac{Cc}{Dd}$; vel eo dissimilior ab uniformi Curvaturâ Circuli dici potest Curvatura hæc.

Jam, demissis DB & db ordinatim ad rectos Angulos Applicatis alicui Rectæ AB secanti DC in P, pone $AB = x$; $BD = y$; $DP = t$; $DC = u$, & ideo $Bb = o\dot{x}$, erítque $Cc = o\dot{u}$; & $BD : DP :: Bb : Dd = \frac{to\dot{x}}{y}$; ac $\frac{Cc}{Dd} = \frac{y\dot{u}}{t\dot{x}} = \frac{y\dot{u}}{t}$, ponendo $\dot{x} = 1$.

Cùm autem Relatio inter x & y exhibeatur per Æquationem aliquam, & hinc (juxta Probl. IV. & V.) inveniri possit Perpendicularis DP vel t, & Radius Curvaturæ u, ipsiúsque Radii Fluxio $\dot{u}$ (per Probl. I.;) datur ergo etiam $\frac{y\dot{u}}{t}$, Index Inæquabilitatis Curvaturæ.

EXEMPL.

Fig. 1.

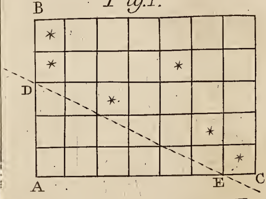


Fig. 2.

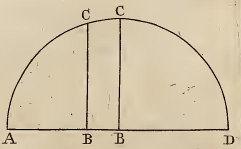


Fig. 3.

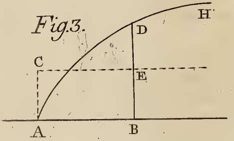


Fig. 4.

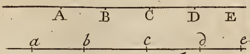


Fig. 5.

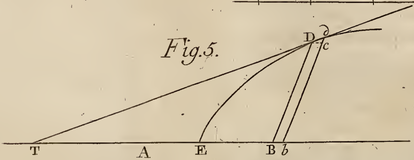
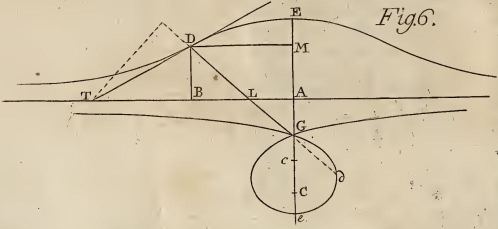


Fig. 6.



E X E M P L. I.

Sit Æquatio ad Parabolam $2ax = yy$. Tunc (per Probl. IV.) $BP = a$, ergo $DP = \sqrt{aa + yy} = t$. Item (per Probl. V.) $BK = a + 2x$; & $BP : PD :: BK : DC = \frac{at + 2tx}{a} = u$. Jam, Æquationes $2ax = yy$; $aa + yy = tt$; & $\frac{at + 2tx}{a} = u$, dant $2a\dot{x} = 2y\dot{y}$; $2y\dot{y} = 2t\dot{t}$; & $\frac{a\dot{t} + 2x\dot{t} + 2t\dot{x}}{a} = \dot{u}$. Has reduc, & pro $\dot{x}$ scribe 1, atque invenies $\dot{y} = \frac{a}{y}$; $\dot{t} = (\frac{y\dot{y}}{t}) = \frac{a}{t}$; & $\dot{u} = \frac{a\dot{t} + 2x\dot{t} + 2t}{a}$. Sic autem determinatis $\dot{y}$, $\dot{t}$, & $\dot{u}$, habebis $\frac{y\dot{u}}{t}$ Indicem Inæquabilitatis Curvaturæ.

Si, in Numeris, determinares quòd $a = 1$, aut $2x = yy$, & quòd $x = \frac{1}{2}$; tunc $y = (\sqrt{2x} =) 1$; $\dot{y} = (\frac{a}{y} =) 1$; $t = (\sqrt{aa + yy} =) \sqrt{2}$; $\dot{t} = (\frac{a}{t} =) \sqrt{\frac{1}{2}}$; & $\dot{u} = (\frac{a\dot{t} + 2x\dot{t} + 2t}{a} =) 3\sqrt{2}$. Igitur $\frac{y\dot{u}}{t} = 3$, qui Numerus est Index Inæquabilitatis.

Si verò statuisses quòd $x = 2$, tunc $y = 2$; $\dot{y} = \frac{1}{2}$; $t = \sqrt{5}$; $\dot{t} = \sqrt{\frac{1}{5}}$; & $\dot{u} = 3\sqrt{5}$. Quamobrem $(\frac{y\dot{u}}{t} =)$ 6 esset Index Inæquabilitatis.

Igitur Inæqualitas Curvaturæ, quâ prædita est Parabola in Puncto illo, ex quo demissa ad rectos Angulos super Axem Ordinata, æqualis est recto Lateri, illius est duplex Inæqualitatis, quam habet eadem Curva ad Punctum, unde acta, ut supra, Ordinata æqualis est semissi Lateris recti, id est, Curvatura ad primum Punctum duplo magis differt à Circuli Curvatura, quàm Curvatura ad secundum Punctum.

EXEMPL.

EXEMPL. II.

Sit Æquatio $2ax - bxx = yy$, & (per Probl. IV.) est $a - bx = BP$; ergo $tt = aa - 2abx + bbxx + yy = aa - byy + yy$: Pariter (per Probl. V.) est $DH = y + \frac{y^3 - by^3}{aa}$; ubi, si pro $yy - byy$ ponas $tt - aa$, habebis $DH = \frac{tty}{a}$; Sed est $BD : DP :: DH : DC = \frac{t^3}{aa} = u$; Ac (per Probl. I.) Æquationes $2ax - bxx = yy$; $aa - byy + yy = tt$; & $\frac{t^3}{aa} = u$; dant $a - bx = y\dot{y}$; & $y\dot{y} - by\dot{y} = t\dot{t}$; ac $\frac{3tt\dot{t}}{aa} = \dot{u}$. Datur igitur $\dot{u}$; ergo etiam $\frac{\dot{y}\dot{u}}{\dot{t}}$ Index Inæquabilitatis Curvaturæ.

Sic in Ellipsi $2x - 3xx = yy$; in quâ est $a = 1$; & $b = 3$; si ponas $x = \frac{1}{2}$, erit etiam $y = \frac{1}{2}$: sed $\dot{y} = -1$; $t = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $\dot{t} = \sqrt{2}$; & $\dot{u} = 3\sqrt{\frac{1}{2}}$: quocirca $\frac{\dot{y}\dot{u}}{\dot{t}} = \frac{3}{2}$, quæ Fractio exponit Curvaturæ Inæquabilitatem. Hinc patet, quòd Inæquabilitas Curvaturæ, quam habet Ellipsis ad Punctum D hìc assignatum, est bis minùs inæquabilis, (vel bis similior Curvaturæ Circuli,) quàm Curvatura Parabolæ ad ejus Punctum, ex quo demissa Ordinata ad Axem æquat semissem Lateris recti.

Si animus fert comparare Conclusiones, quas invenimus in his Exemplis, perspicies, quòd in Parabolâ $2ax = yy$ est Index Inæquabilitatis $(\frac{\dot{y}\dot{u}}{\dot{t}} =) \frac{3y}{a}$, sed in Ellipsi $2ax - bxx = yy$ habes $(\frac{\dot{y}\dot{u}}{\dot{t}} =) \frac{3y - 3by}{aa} \times BP$; unde in Hyperbolâ $2ax + bxx = yy$, servatâ Analogiâ, erit Index $(\frac{\dot{y}\dot{u}}{\dot{t}} =) \frac{3y + 3by}{aa} \times BP$. Unde liquet, quòd ad diversa Puncta singularum Sectionum conicarum

Fig. 7.

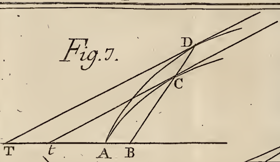


Fig. 8.

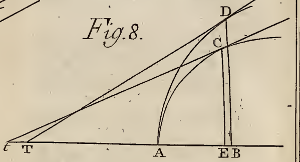


Fig. 9.

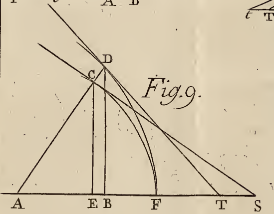


Fig. 10.

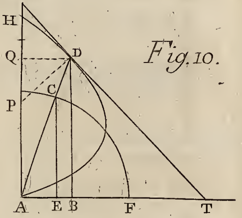


Fig. 11.

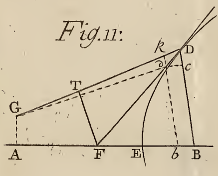


Fig. 12.

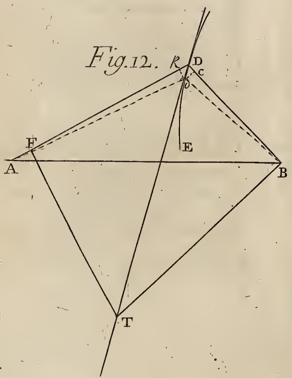
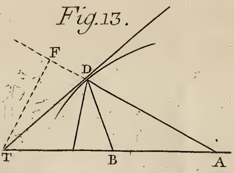


Fig. 13.



rum ſeorſum conſideratarum, Inæquabilitas Curvaturæ eſt ut rectangulum $BD \times BP$, & quòd ad varia Parabolæ Puncta eſt ut Ordinata BD.

Cùm autem Parabola ſit ſimpliciſſima Figurarum, quæ inæqualiter flectuntur, & cùm Inæqualitas Curvaturæ in illâ facilè determinetur, (eſt enim ejus Index $6 \times \frac{\text{Ordinatam}}{\text{Latere Recto}}$), ideo Curvatura aliarum Curvarum non inconcinnè comparabitur cum hujus Curvaturâ.

Sic, ſi quæratur quænam eſt Curvatura Ellipſeos $2x - 3xx = yy$ ad illud Perimetri Punctum, quod determinatur aſſumptâ $x = \frac{1}{2}$: Quia hujus Curvaturæ Index eſt $\frac{3}{2}$, ut jam invenimus, reſponderi poteſt Curvaturam hanc ſimilem eſſe ei, quam habet Parabola $6x = yy$ ad Punctum illud, inter quod & Axem, Ordinata ad rectos Angulos par eſt $\frac{3}{2}$.

Haud ſecus, (*Fig.* 15.) cùm Fluxio Spiralis ADE ſit ad Fluxionem Subtenſæ AD in aliquâ datâ Ratione, puta, ut d eſt ad e; ejus Concavitatem verſùs age $AP = \frac{e}{\sqrt{dd - ee}} \times AD$ & Perpendicularem ipſi AD; atque erit P Centrum Curvaturæ, & $\frac{AP}{AD}$ aut $\frac{e}{\sqrt{dd - ee}}$ Index Inæquabilitatis: Quapropter hæc Spiralis habet ubique Curvaturam ſimiliter inæquabilem, ut Parabola $6x = yy$ eam habet in Puncto, ex quo ducta ad rectos Angulos Ordinata ad Axem æqualis eſt Quantitati $\frac{e}{\sqrt{dd - ee}}$. TAB. III.

Eâdem ratione (*Fig.* 20.) Index Inæquabilitatis ad Trochoïdis Punctum D invenietur $\frac{AB}{BL}$. Igitur ejus Curvatura ad idem Punctum D eodem pacto inæquabilis eſt, aut eodem pacto differt à Circulo ac Curvatura cujuſvis Parabolæ $ax = yy$ ad Punctum, ubi Ordinata eſt $= \frac{1}{6} a \times \frac{AB}{BL}$. TAB. IV.

His, opinor, ſenſus Problematis ſatis explanatus eſt; eo autem benè perſpecto, quilibet, qui obſervet Series rerum ſupra traditarum, poterit ſibimet ipſe plura ſuppeditare Exempla, & invenire plures operandi Methodos ab hiſce diverſas, prout occaſio poſtulabit. Ita ut ei non admodum difficilis, ſive potiùs omnino facilis ſit futura, (dummodo faſtidium illi non faciant computationis tædium & ambages,) Solutio Problematum ejuſdem naturæ, puta.

I.

Invenire in quâvis Curvâ Punctum, ubi Inæquabilitas Curvaturæ eſt aut nulla, aut infinita, aut omnium maxima vel minima.

Sic Inæquabilitas nulla eſt ad Sectionum conicarum Vertices, infinita ad Trochoïdis Cuſpides, maxima ad ea Ellipſeos Puncta, ad quæ Rectangulum $BD \times BP$ eſt omnium maximum, id eſt, ad quæ Ellipſis ſecatur à Diagonalibus Parallelogrammi ita circumſcripti, ut Latera tangant præcipuos Curvæ Vertices.

II.

Determinare Curvam certæ alicujus Speciei, puta, Sectionem conicam, cujus Curvatura ad datum Punctum ſit æqualis & ſimilis Curvaturæ alterius cujuſvis Curvæ ad datum Punctum.

III.

Determinare conicam Sectionem, ad cujus quodcumque Punctum Curvatura & poſitio Tangentis, (reſpectivè ad Axem,) ſimiles ſint Curvaturæ & Tangentis poſitioni alterius cujuſque Curvæ ad datum Punctum.

Utilitas hujus Problematis in eo verſatur, quod ſic pro Ellipſibus ſecundi generis, quarum proprietates ad Lucis Refractionem pertinentes explicatæ fuerunt à CARTESIO in *Geometriâ* ſuâ, uſurpari poſſunt Sectiones conicæ, quæ idem ferè prorſus efficient. Quod intelligendum eſt de ceteris Curvis.

PROBL.

Fig. 14.

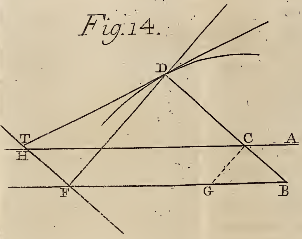


Fig. 15.

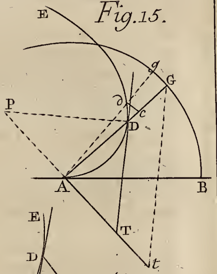


Fig. 16.

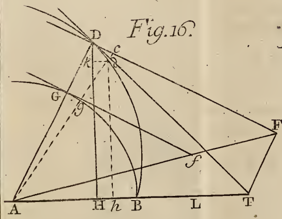


Fig. 17.

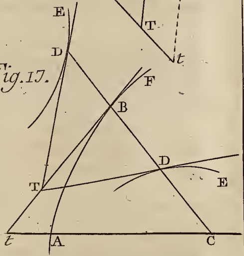


Fig. 18.

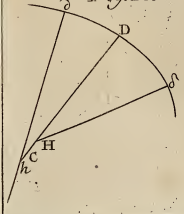
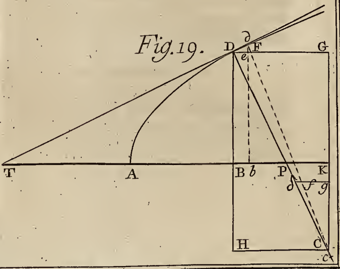


Fig. 19.



PROBL. VII.

Reperire quotlibet Curvas, quarum Areæ possint exhiberi finitâ Æquatione.

Sit (*Fig.* 27.) AB Abscissa Curvæ, è cujus Vertice A demittatur Perpendicularis $AC = 1$, deinde agatur CE Parallela AB. Præterea, sit BD ordinatim Applicata ad rectos Angulos, quæ occurrat Rectæ CE in E & Curvæ AD in D. Intellige Areas ACEB & ADB generari motu Rectarum EB & BD decurrentium Rectam AB: Tunc harum Arearum Incrementa vel Fluxiones erunt semper ut Lineæ describentes EB & BD. Fac igitur Parallelogrammum ACEB, aut $AB \times 1 = x$, & Area Curvæ ADB dicatur $= z$, & Fluxiones $\dot{x}$ ac $\dot{z}$ erunt ut BE & BD, ita ut, si ponas $\dot{x} = 1 = EB$, fit $\dot{z} = BD$. TAB. V.

Assumptâ nunc Æquatione arbitrariâ, quâ determinetur Relatio ipsarum x & z, ex eâ (per Probl. I.) eruetur $\dot{z}$; igitur habebuntur duæ Æquationes, quarum una determinabit Curvam, altera verò Aream.

EXEMPLA.

Sume $xx = z$, unde (per Probl. I.) $2x\dot{x} = \dot{z}$, aut, (quia $\dot{x} = 1$,) $2x = \dot{z}$.

Pone $\frac{x^3}{a} = z$, hinc oritur $\frac{3xx}{a} = \dot{z}$, Æquatio ad Parabolam.

Sit $ax^3 = zz$, aut $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = z$, unde conficietur $\frac{3}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \dot{z}$, aut $\frac{9}{4} ax = \dot{z}\dot{z}$, Æquatio pariter ad Parabolam.

Assume $a^6 x^{-2} = zz$, aut $a^3 x^{-1} = z$, & habebis $-a^3 x^{-2} = \dot{z}$, aut $a^3 + xx\dot{z} = 0$. Ubi valor negativus ipsius $\dot{z}$ tan-

z tantùm indicat quòd BD sumi debet ad partes contrarias, relativè ad BE.

Item, si capias $aacc + ccxx = zz$, assequeris $2ccx = 2z\dot{z}$, unde, eliminato symbolo z, erues $\frac{cx}{\sqrt{aa+xx}} = \dot{z}$.

Vel, si ponas $\frac{aa+xx}{b} \times \sqrt{aa+xx} = z$, fac $\sqrt{aa+xx} = u$, eritque $\frac{u^3}{b} = z$, atque hinc (per Probl. I.) $\frac{3uu\dot{u}}{b} = \dot{z}$: Atqui Æquatio $aa+xx = uu$ dat $2x = 2u\dot{u}$; cujus ope si extermines $\dot{u}$, invenies $\frac{3ux}{b} = \dot{z} = \frac{3x}{b}\sqrt{aa+xx}$.

Si demum assumas $8 - 3xz + \frac{2}{5}\dot{z} = z\dot{z}$, obtinebis $-3z - 3x\dot{z} + \frac{2}{5}\ddot{z} = 2z\dot{z}$, quapropter, ex assumptâ Æquatione primò quærenda est Area z, & deinde Ordinata $\dot{z}$, ex Æquatione quæ suboritur.

Et sic ex Areis ad libitum fictis semper determinare licet Ordinatas, ad quas pertinent.

PROBL. VIII.

Invenire quotlibet Curvas quarum Areæ ad Aream cujuscumque datæ Curvæ habeant Relationem expositam finitâ Æquatione.

TAB. V.

Curva data (*Fig.* 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35.) sit FDH, & GEI Curva petita. Concipe earum Ordinatas BD, & EC moveri ad rectos Angulos per earum Abscissas vel Bases AB, & AC. Tunc, Incrementa vel Fluxiones Arearum hoc modo descriptarum, erunt ut hæ Ordinatæ ductæ in Velocitates quibus feruntur, videlicet in respectivarum Abscissarum Fluxiones. Pone igitur $AB = x$, $BD = u$, $AC = z$, atque $CE = y$; Aream verò $AFDB = s$, & Aream $AGEC = t$; Harumque Arearum Fluxiones sint $\dot{s}$, & $\dot{t}$; at-

$\dot{t}$; atque erit $u\dot{x} : y\dot{z} :: \dot{s} : \dot{t}$; quamobrem, si ponas $\dot{x} = 1$, & $u = \dot{s}$ ut antea, restabit $y\dot{z} = \dot{t}$, & $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.

Idcirco assumantur duæ Æquationes; quarum una exprimat Relationem Arearum s, & t, & altera Relationem Abscissarum ad eas pertinentium x, & z: Ex his Æquationibus erue (per Probl. I.) Fluxiones $\dot{t}$ & $\dot{z}$, & deinde fac $\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = y$.

EXEMPL. I.

Data Curva FDH sit Circulus expressus Æquatione $ax - xx = uu$, & quærantur aliæ Curvæ quarum Areæ sint æquales Areæ Circuli. Est ergo, per hypothesin, $s = t$, & propterea $\dot{s} = \dot{t}$, ac $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{u}{\dot{z}}$. Superest z, quæ determinanda est assumptâ aliquâ Relatione inter Abscissas x, & z.

Suppone, *ex. gr.*, quòd $ax = zz$, tunc (per Probl. I.) $a = 2z\dot{z}$; Igitur, (ipsi $\dot{z}$ substituendo $\frac{a}{2z}$,) $y = \frac{u}{\dot{z}}$ fiet $= \frac{2uz}{a}$: Sed $u = (\sqrt{ax - xx} =) \frac{z}{a}\sqrt{aa - zz}$, ergo $\frac{2zz}{aa} \times \sqrt{aa - zz} = y$ est Æquatio ad Curvam, cujus Area æquat Aream Circuli.

Pariter, posito quòd $xx = z$, hinc oritur $2x = \dot{z}$, & ideo $y = (\frac{u}{\dot{z}}) \frac{u}{2x}$; unde, exterminatis u & x, excudes $y = \frac{\sqrt{az^{\frac{1}{2}} - z}}{2z^{\frac{1}{2}}}$.

Sed si $cc = xz$, esset $o = \dot{z} + x\dot{z}$, & $-\frac{ux}{z} = y = -\frac{c^3}{z^3}\sqrt{az - cc}$.

Pariter, suppositâ Æquatione $ax + \frac{s}{1} = z$, esset (per Probl. I.) $a + \dot{s} = \dot{z}$, & idcirco $\frac{u}{a + \dot{s}} = y = \frac{u}{a + u}$, quæ Æquatio est ad mechanicam Curvam.

EXEMPL. II.

Iterum detur Circulus $ax - xx = uu$, & petantur Curvæ, quarum Areæ sint ad Aream Circuli in quâcumque aliâ assumptâ Ratione. Ut, si poneres $cx + s = t$, ac $ax = zz$, esset (per Probl. I.) $\dot{c} + \dot{s} = \dot{t}$, ac $a = 2z\dot{z}$: Quocirca $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{2cz + 2z\dot{s}}{a}$; &, ponendo $\sqrt{ax - xx}$ pro $\dot{s}$ & $\frac{zz}{a}$ pro x, esset $y = \frac{2cz}{a} + \frac{2zz}{aa}\sqrt{aa - zz}$.

Sed, si assumeres $s - \frac{2u^3}{3a} = t$, & $z = x$, haberes $\dot{s} - \frac{2uu\dot{u}}{a} = \dot{t}$, ac $1 = \dot{z}$: Quâ de causâ $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \dot{s} - \frac{2uu\dot{u}}{a}$, aut $= u - \frac{2uu\dot{u}}{a}$. Jam, ad exterminandum $\dot{u}$, resume Æquationem $ax - xx = uu$, quæ (per Probl. I.) dat $a - 2x = 2u\dot{u}$, ergo $y = \frac{2ux}{a}$; unde, si elimines u & x substituendo earum valores $\sqrt{ax - xx}$ & z, fiet $y = \frac{2z}{a} \times \sqrt{az - zz}$.

Quòd

Quòd si cepisses $ss = t$, & $x = zz$ invenisses $2s\dot{s} = \dot{t}$, & $\dot{x} = 2z\dot{z}$, & propterea $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = 4sz\dot{s}$; &, scribendo pro $\dot{s}$ & x, $\sqrt{ax - xx}$ ac zz, conficitur $y = 4szz \times \sqrt{a - zz}$ Æquatio ad Curvam mechanicam.

EXEMPL. III.

Eâdem ratione possunt inveniri Figuræ, quæ habeant assumptam Relationem ad aliquam aliam datam Figuram. Detur Hyperbola $cc + xx = uu$; si assumas $s = t$, & $xx = cz$, habebis $\dot{s} = \dot{t}$, & $2x = c\dot{z}$, igitur $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{c\dot{s}}{2x}$. Jam, substitue $\sqrt{cc + xx}$ pro $\dot{s}$, & $c^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$ pro x; erit $y = \frac{c}{2z} \sqrt{cz + zz}$.

Haud aliter, si ponas $xu - s = t$, & $xx = cz$, reperies $\dot{u} + x\dot{u} - \dot{s} = \dot{t}$, & $2x = c\dot{z}$; sed $u = \dot{s}$; ergo $x\dot{u} = \dot{t}$. Quapropter $y = \frac{\dot{t}}{\dot{z}} = \frac{c\dot{u}}{\dot{z}}$. Atqui Æquatio $cc + xx = uu$, dat $\dot{x} = u\dot{u}$ (per Probl. I.), est igitur $y = \frac{cx}{2u}$; quæ Æquatio, ponendo $\sqrt{cc + xx}$ pro u; & $c^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}$ pro x, evadit $y = \frac{cz}{2\sqrt{cz + zz}}$.

EXEMPL. IV.

Quinimo, si Cissois $\frac{xx}{\sqrt{ax - xx}} = u$ esset data Figura, cui comparanda Figura peteretur; & si, ad hoc perficiendum assumeres $\frac{x}{3}\sqrt{ax - xx} + \frac{2}{3}s = t$ suppone $\frac{x}{3}\sqrt{ax - xx} = h$, & hujus Fluxionem pone $\dot{h}$; erit igitur $\dot{h} + \frac{2}{3}\dot{s} = \dot{t}$. Sed Æquatio

tio $\frac{ax^3 - x^4}{9} = hh$, dat $\frac{3axx - 4x^3}{9} = 2h\dot{h}$, & propterea, (exterminando h,) $\frac{3ax - 4xx}{6\sqrt{ax - xx}} = \dot{h}$. Præterea, quia $\frac{2}{3}\dot{s} = \frac{2}{3}\dot{u}$ $= \frac{4xx}{6\sqrt{ax - xx}}$, erit $\frac{ax}{2\sqrt{ax - xx}} = \dot{t}$. Nunc determinaturus z & $\dot{z}$ assume $\sqrt{aa - ax} = z$; unde (per Probl. I.) $- a = 2z\dot{z}$, aut $\dot{z} = -\frac{a}{2z}$. Quapropter est $y = (\frac{\dot{t}}{\dot{z}} = -\frac{zx}{\sqrt{ax - xx}}$ $= \sqrt{\frac{zzx}{a - x}} = \sqrt{ax} =) \sqrt{aa - zz}$. Cùm autem Æquatio hæc sit ad Circulum, hic habes Relationem inter Areas Circuli, & Cissoidis.

Quòd si assumpsisses $\frac{2x}{3}\sqrt{ax - xx} + \frac{1}{3}s = t$, & $x = z$, hinc dimanâsset $y = \sqrt{az - zz}$; Æquatio rursus ad Circulum.

Eâdem ratione, si daretur aliqua Curva mechanica, possent reperiri aliæ Curvæ mechanicæ priori conferendæ.

Sed ad inveniendas Curvas geometricas, optimum erit ex Rectis, quæ geometricè altera ab alterâ dependent, aliquam sumere pro Basi; vel Abscissâ; & Aream, quæ complet Parallelogrammum, investigare, ponendo ejus Fluxionem æquivalere Abscissæ ductæ in Fluxionem Ordinatæ.

EXEMPL. V.

TAB. IV. Sic (*Fig.* 20.) propositâ Trochoïde ADF, eam refero ad Abscissam AB; &, completo Parallelogrammo ABDG, investigo Superficiem complentem ADG, eam supponendo descriptam motu Rectæ GD, & idcircò ejus Fluxionem æquivalentem Lineæ GD ductæ in Velocitatem Motûs sui, id est $= x \times \dot{u}$. Nunc, quia AL parallela est Tangenti DT, est AB ad BL, ut Fluxio ejusdem AB ad Fluxionem Ordinatæ BD, videlicet ut 1 ad $\dot{u}$. Quocirca $\dot{u}$

$=\frac{BL}{AB}$, & ideo $x\dot{u}=BL$. Ergo Area ADG deſcribitur Fluxione BL; &, quia eâdem Fluxione deſcribitur Area circularis ALB, hæc illi æqualis eſt.

Eodem pacto, ſi concipias ADF eſſe Figuram Arcuum, aut Sinuum verſorum, ea ſcilicet, cujus Ordinata BD æqualis eſt Arcui AL; Cùm Fluxio Arcûs AL ſit ad Fluxionem Abſciſſæ AB, ut PL ad LB; id eſt, cùm ſit $\dot{u} : 1 :: \frac{1}{2}a : \sqrt{ax-xx}$, & propterea $\dot{u}=\frac{a}{2\sqrt{ax-xx}}$, erit $x\dot{u}$, Fluxio Areæ ADG $=\frac{ax}{2\sqrt{ax-xx}}$: Quocirca Recta æqualis Quantitati $\frac{ax}{2\sqrt{ax-xx}}$ ſi concipiatur applicata, tanquam Ordinata perpendicularis ad Punctum aliquod B Rectæ AB, terminabitur certâ Curvâ geometricâ, cujus Area contigua Abſciſſæ AB æqualis eſt Areæ ADG.

Et ſic inveniri poſſunt Figuræ geometricæ, æquales aliis Figuris effictis Applicatione (ſub quovis Angulo) Arcuum Circuli, Hyperbolæ, aut alterius cujuſcumque Curvæ, ad Sinus rectos, aut verſos horum Arcuum, aut ad aliam quamlibet Rectam, quæ poſſit geometricè determinari.

In Spiralibus breviſſimum eſt negotium. Nam (*Fig.* 36.) ex Rotationis Centro A deſcribe quolibet Radio Arcum DG, qui ſecet Rectam AF in G, & Spiralem in D; quia hic Arcus, tanquam Linea, quæ fertur per Abſciſſam AG, deſcribit Spiralis Aream AHDG, ita ut Fluxio hujus Areæ ſit ad Fluxionem Rectanguli $1\times AG$, ut Arcus GD eſt ad 1, ideo Recta perpendicularis GL æqualis huic Arcui, eodem pacto peragrans eandem Lineam AG deſcribet Aream AlLG æqualem Areæ AHDG; & Curva AlL erit geometrica. Præterea, ſi ducatur ſubtenſa AL, erit Triangulum $ALG=\frac{1}{2}AG\times GL=\frac{1}{2}AG\times GD=$ Sectori AGD. Igitur Segmenta complentia ALl & ADH erunt etiam æqualia. Et hæc non ſolum conveniunt *Spirali Archimedeæ*, (in quâ Hypotheſi AlL eſt *Parabola Apolloniana*) ſed cuicumque alteri; ita ut

TAB. VI.

 quævis

quævis earum converti eâdem facilitate possit in æquales Geometricas Curvas.

Poteram attulisse plura specimina Constructionum hujus Problematis, sed hæc sufficient; sunt enim adeo generalia, ut, quæcunque hactenus inventa sunt, aut (opinor) inveniri possunt de Curvarum Areis; aliquo pacto in his contineantur, & per hæc determinari possint, plerumque sine solitis ambagibus, & perplexitatibus.

Præcipua verò utilitas hujus, & præcedentis Problematis in eo sita est, quòd assumptis conicis Sectionibus, aut quibusvis aliis Curvis cognitæ magnitudinis, invenire licet alias Curvas, quæ cum iis comparari possunt, & earum Æquationes ordine disponi in Catalogo, seu Tabulâ. Constructâ autem hac Tabulâ, quando invenienda est Area Curvæ alicujus, perspiciendum est utrùm Æquatio dedefiniens ejus naturam, vel immediatè sit in hac Tabulâ, vel saltem transformari possit in aliam, quæ ibi sit; quod si accidit, datur hæc Area. Insuper Catalogus, aut Tabula hæc applicari potest ad determinandas Curvarum Longitudines; ad invenienda earum Centra Gravitatis; Solida genita earum rotatione; Superficies horum Solidorum, & quasvis alias Fluentes Quantitates generatas Fluxionibus huic analogis.

PROBL. IX.

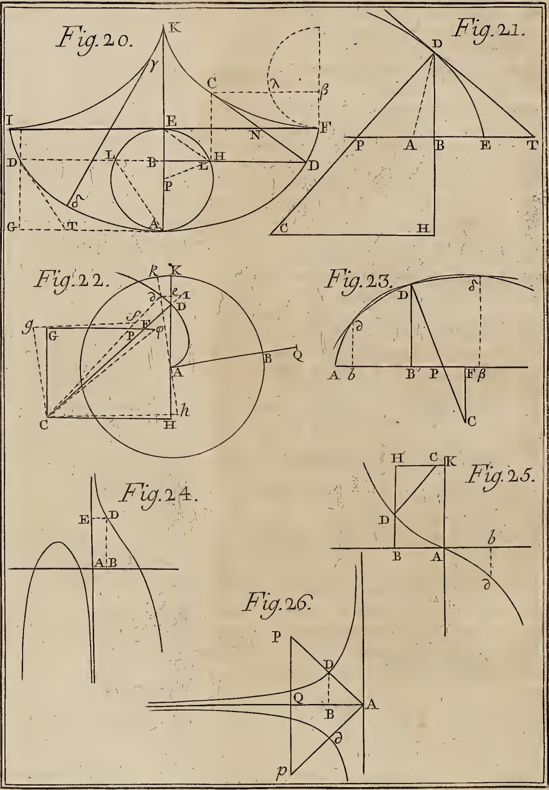
Determinare Aream cujuscunque Curvæ propositæ.

Hujus Problematis Resolutio hinc pendet, quòd ex datâ Fluxionum Relatione, potest inveniri Fluentium Ratio, (ut in Probl. II.).

TAB. V. Et primò quidem, si (*Fig.* 27.) recta Linea BD, cujus Motu describitur Area quæsita AFDB, fertur ad rectos Angulos super Abscissam AB positione datam; intellige, (ut antea,) Parallelogrammum ABEC eodem tempore describi ultra AB à Lineâ, quæ Unitatem æquet. Et, posito, quòd BE sit Fluxio hujus Parallelogrammi; erit BD Fluxio Areæ quæsitæ.

Fac igitur $AB = x$; & pariter $ABEC = 1 \times x = x$; ac $BE = \dot{x}$; Item, voca Aream $AFDB = z$; eritque $BD = \dot{z}$; quinetiam $= \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$

Opusc. II. Tab. IV. *pag. 138. Tom. I.*



$\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, quia $\dot{x} = 1$. Igitur Æquatio exprimens BD, unà exprimit Rationem Fluxionum $\frac{\dot{z}}{\dot{x}}$, & hinc (per Problematis I. Caf. I.) poteſt excudi Relatio Fluentium x, & z.

EXEMPL. I.

Quando BD, *aut* $\dot{z}$, *æquat aliquam ſimplicem Quantitatem.*

Detur $\frac{xx}{a} = \dot{z}$, aut $= \frac{\dot{z}}{\dot{x}}$ (Æquatio ad Parabolam), hinc (per Probl. II.) conficietur $\frac{x^3}{3a} = z$. Quapropter $\frac{x^3}{3a}$, aut $\frac{1}{3}$ AB×BD æquat Aream Parabolæ AFDB.

Proponatur $\frac{x^3}{aa} = \dot{z}$ (Æquatio ad Parabolam ſecundi generis), hinc habebimus $\frac{x^4}{4aa} = z$; videlicet $\frac{1}{4}$ AB × BD eſt Area AFDB.

Sit $\frac{a^3}{xx} = \dot{z}$, aut $a^3 x^{-2} = \dot{z}$ (Æquatio ad Hyperbolam ſecundi generis), ex eâ eruetur $-a^3 x^{-1} = z$, aut $-\frac{a^3}{x} = z$. Rectangulum nempe (*Fig.* 37.) AB × BD æquat Aream HDBH TAB. VI. in infinitum extenſam, & jacentem ultra Ordinatam BD, ut inſinuat negativus ejus valor.

Eodem pacto, ſi daretur $\frac{a^4}{x^3} = \dot{z}$, aſſequeremur $-\frac{a^4}{2xx} = z$.

Quinimo propoſita Æquatio $a\dot{x} = \dot{z}z$, (quæ rurſus pertinet

ad Parabolam), id est $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = z$, suppeditat $\frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = z$, scilicet $\frac{2}{3}$ AB $\times$ BD = Areæ AFDB.

Sed $\frac{a^3}{x} = zz$; dat $+ 2 a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} = z$, aut 2 AB $\times$ BD = AFDB.

Sed $\frac{a^5}{x^3} = zz$; gignit $- \frac{2a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = z$, sive 2 AB $\times$ BD = HDBH.

Denique $axx = z^3$; præbet $\frac{3}{5} a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{5}{3}} = z$; videlicet $\frac{3}{5}$ AB$\times$BD = AFDB.

EXEMPL. II.

Quando z æquat Aggregatum ex simplicibus Quantitatibus.

Sit $x + \frac{xx}{a} = z$; erit $\frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3a} = z$.

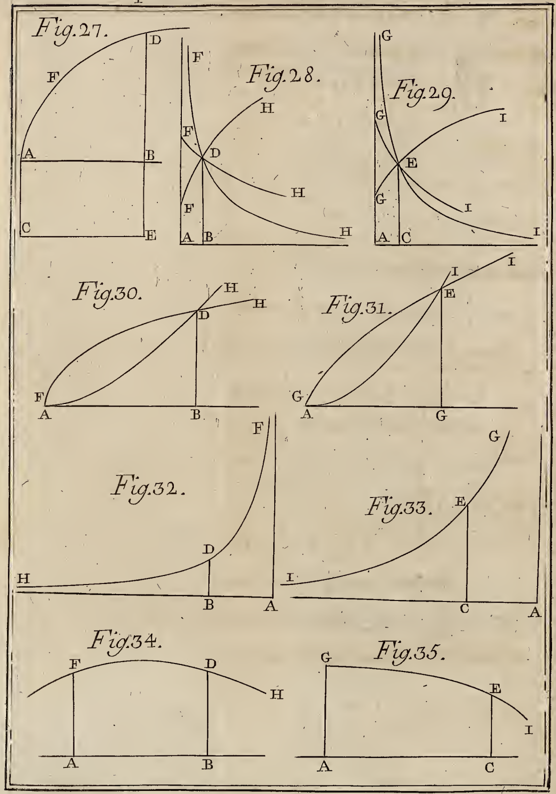
Detur $a + \frac{a^3}{xx} = z$; habebimus $ax - \frac{a^3}{x} = z$.

Proponatur $3x^{\frac{1}{2}} - \frac{5}{xx} - \frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} = z$; hinc exsurget $2x^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{x} - 4x^{\frac{1}{2}} = z$.

EXEMPL. III.

Ubi Reductio *per* Divisionem *præmittenda est.*

Detur $\frac{aa}{b+x} = z$ (Æquatio ad Hyperbolam *Apollonianam*); & Divisione in infinitum peractâ, fiet $z = \frac{aa}{b} - \frac{aax}{bb} + \frac{aax}{b^3}$ —


Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.

$-\frac{aax^3}{b^4}$; &c. Et hinc (per Probl. II.), ut in ſecundâ Exemplorum congerie, obtinebis $z = \frac{aax}{b} - \frac{aaxx}{2bb} + \frac{aax^3}{3b^3} - \frac{aax^4}{4b^4}$; &c.

Proponatur $\frac{1}{1+xx} = \dot{z}$, erit, per Diviſionem, $\dot{z} = 1 - xx + x^4 - x^6$; &c, aut etiam $\dot{z} = \frac{1}{xx} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}$; &c. Quapropter (per Probl. II.) $z = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$; &c. $=$ AFDB; aut $z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5}$; &c. $=$ HDBH.

Sit $\frac{2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}}{1 + x^{\frac{1}{2}} - 3x} = \dot{z}$; Diviſio ſuppeditabit $\dot{z} = 2x^{\frac{1}{2}} - 2x + 7x^{\frac{3}{2}} - 13xx + 34x^{\frac{5}{2}}$; &c. Et hinc (per Probl. II.) erit $z = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - xx + \frac{14}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{13}{3}x^3 + \frac{68}{7}x^{\frac{7}{2}}$; &c.

E X E M P L. IV.

Ubi prævia Reductio *per* Extractionem Radicis *requiritur.*

Detur $\dot{z} = \sqrt{aa+xx}$ (Æquatio ad Hyperbolam,) cujus Radix extracta, ad infinitam Terminorum multitudinem, dat $\dot{z} = a + \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} + \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{112a^7}$; &c. , unde, ut ſupra, $z = ax + \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} + \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1008a^7}$; &c.

Eodem pacto, ſi proponeretur Æquatio (ad Circulum) $\dot{z} = \sqrt{aa-xx}$, ea ſuppeditaret $z = ax - \frac{x^3}{6a} - \frac{x^5}{40a^3} - \frac{x^7}{112a^5} - \frac{5x^9}{1008a^7}$; &c.

Et si haberemus $\dot{z} = \sqrt{x - xx}$ (Æquatio iterum ad Circulum) per Radicis Extractionem exsurgeret $\dot{z} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16} x^{\frac{7}{2}}$; &c. Et idcirco $z = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72} x^{\frac{9}{2}}$; &c.

Sic $\dot{z} = \sqrt{aa + bx - xx}$ (Æquatio pariter ad Circulum) suppeditat, per Radicis Extractionem, $\dot{z} = a + \frac{bx}{2a} - \frac{xx}{2a} - \frac{bbxx}{8a^3}$; &c. Hinc autem conficitur $z = ax + \frac{bxx}{4a} - \frac{x^3}{6a} - \frac{bbx^3}{24a^3}$; &c.

Sic etiam $\sqrt{\frac{1 + axx}{1 - bxx}} = \dot{z}$, dat per debitam Reductionem

$$\begin{aligned}\dot{z} = 1 + \tfrac{1}{2}\, b\, xx &+ \tfrac{3}{8}\, bb\, x^4; \ \&c.\\ + \tfrac{1}{2}\, a \quad &+ \tfrac{1}{4}\, ab \ ; \ \&c.\\ &- \tfrac{1}{8}\, aa \ ; \ \&c.\end{aligned}$$

unde fit

$$\begin{aligned}z = x + \tfrac{1}{6}\, b\, x^3 &+ \tfrac{3}{40}\, bb\, x^5; \ \&c.\\ - \tfrac{1}{6}\, a \quad &+ \tfrac{1}{20}\, ab \ ; \ \&c.\\ &- \tfrac{1}{40}\, aa \ ; \ \&c.\end{aligned}$$

Sic demum $\dot{z} = \sqrt[3]{a^3 + x^3}$ per Extractionem cubicæ Radicis, dat $\dot{z} = a + \frac{x^3}{3aa} - \frac{x^6}{9a^5} + \frac{5x^9}{81a^8}$; &c., quapropter (per Probl. II.) est $z = ax + \frac{x^4}{12aa} - \frac{x^7}{63a^5} + \frac{x^{10}}{162a^8}$; &c. $=$ AFDB.

Aut

Aut etiam $\dot{z} = x + \frac{a^3}{3xx} - \frac{a^6}{9x^5} + \frac{5a^9}{81x^8}$; &c., unde $z = \frac{1}{2} \times xx - \frac{a^3}{3x} + \frac{a^6}{36x^4} - \frac{5a^9}{567x^7}$; &c. = HDBH.

E x e m p l. V.

Quando Æquatio per Solutionem affectæ Æquationis *præparanda est.*

Si Curva definiretur Æquatione $\dot{z}^3 + aa\dot{z} + ax\dot{z} - 2a^3 - x^3 = 0$; Extrahe Radicem, & invenies $\dot{z} = a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512aa}$; &c., unde obtinebis, Methodo jam sæpius usurpatâ; $z = ax - \frac{xx}{8} + \frac{x^3}{192a} + \frac{131x^4}{2048aa}$; &c.

Quod si $\dot{z}^3 - c\dot{z}\dot{z} - 2xx\dot{z} - cc\dot{z} + 2x^3 + c^3 = 0$ esset Æquatio ad Curvam, Resolutio proferret tres varias Radices; videlicet aut $\dot{z} = c + x - \frac{xx}{4c} + \frac{x^3}{32cc}$; &c., aut $\dot{z} = c - x + \frac{3xx}{4c} - \frac{15x^3}{32cc}$; &c., aut denique $\dot{z} = -c - \frac{xx}{2c} - \frac{x^3}{2cc} + \frac{x^5}{4c^4}$; &c. Unde prodirent valores trium Arearum correspondentium; nempe $z = cx + \frac{1}{2}xx - \frac{x^3}{12c} + \frac{x^4}{128cc}$; &c., aut $z = cx - \frac{1}{2}xx + \frac{x^3}{4c} - \frac{15x^4}{128cc}$; &c., aut denique $z = -cx - \frac{x^3}{6c} - \frac{x^4}{8cc} + \frac{x^6}{24c^4}$; &c.

Nihil hìc subjungo de Curvis Mechanicis, quia Methodus eas revocandi ad geometricarum formam postea tradetur.

Cùm autem valores z hìc inventi pertineant ad Areas, quæ jacent aliquando juxta finitam Abscissæ partem AB, aliquando juxta ejus partem BH infinitè productam versùs H, aliquando tandem juxta

juxta partes ambas pro variis earum Terminis; ut assignari possit legitimus Areæ valor adjacens alicui parti Abscissæ, hæc Area semper fieri debet æqualis differentiæ valorum z, pertinentium ad partes Abscissarum, quæ terminantur initio & fine Areæ.

TAB. VI. *Ex. gr.* Curva (*Fig.* 37.) expressa per Æquationem $\frac{1}{1+xx}=z$ habet Aream, (ut jam invenimus,) $z=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, &c. Nunc, determinaturus Quantitatem Areæ bdDB adjacentis parti Abscissæ bB; ex valore ipsius z, qui oritur ponendo AB $=$ X, aufero valorem z, qui exsurgit dicendo Ab, $=x$, & restat $X-\frac{1}{3}X^3+\frac{1}{5}X^5$; &c. $-x+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{5}x^5$, &c., pro valore Areæ bdDB. Unde constat, quòd, si Ab. aut x supponeretur æqualis nihilo, valor totius Areæ AFDB foret $X-\frac{1}{3}X^3+\frac{1}{5}X^5$, &c.

In eâdem Curvâ reperitur etiam $z=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^5}$; &c. Hinc rursus, juxta jam dicta, Area bdDB $=\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}$, &c., $-\frac{1}{X}+\frac{1}{3X^3}-\frac{1}{5X^5}$; &c. Quapropter, si AB, aut X poneretur infinita, adjacens Area bdH protensa versùs H, quæ etiam in infinitum extenditur, æquivaleret $\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5x^5}$; &c. Nam, ultima Series $-\frac{1}{X}+\frac{1}{3X^3}-\frac{1}{5X^5}$; &c., evanesceret ob Denominatorem infinitum.

In Curvâ expositâ per Æquationem $a+\frac{a^3}{xx}=z$ invenimus, quòd $z=ax-\frac{a^3}{x}$. Quod ostendit, quòd $aX-\frac{a^3}{X}-ax+\frac{a^3}{x}$ exponit Aream bdDB, quæ fit infinita, quando x ponitur æqualis nihilo, aut X infinita; & idcirco utraque Area AFDB, & bdH in infinitum protenditur; & aliquæ tantummodo partes intermediæ, ut

ut bd DB, exhiberi possunt. Hoc autem semper accidit, quando Abscissa x est simul in aliquorum ex Terminis valoris z Denominatore, & in aliorum Numeratore. Sed quando x est solùm in eorum Numeratore, ut in primo Exemplo, valor z pertinet ad Aream adjacentem ipsi AB, hinc ab hâc Ordinatâ. Et quando x est tantùm in Denominatore, ut in secundo Exemplo, hic valor, postquam omnia Terminorum signa mutaveris, spectat ad totam Aream infinitè productam inde ab Ordinatâ.

Si Curva (*Fig.* 38.) secat Abscissam alicubi inter Puncta b, & B, puta, in E, pro Areâ habebis differentiam (bdE — BDE) Arearum sitarum ad diversas Abscissæ partes; cui differentiæ adde Rectangulum BDGb & obtinebis Aream dEDG. TAB. VI.

Sed hoc præcipuè observandum est, cùm in valore z nonnulli Termini divisi sunt per x non ascendentis supra primam Dimensionem: Nam Areæ respondentes hisce Terminis pertinent ad conicas Hyperbolas; & ideo seorsum exhiberi debent per Series infinitas, quomodo factum videbis in sequentibus.

Sit $\frac{a^3 - aax}{ax + xx} = z$ Æquatio ad Curvam: Hæc, per Divisionem, suppeditat $z = \frac{aa}{x} - 2a + 2x - \frac{2xx}{a} + \frac{2x^3}{aa}$; &c. Hinc $z = \boxed{\frac{aa}{x}} - 2ax + xx - \frac{2x^3}{3a} + \frac{x^4}{2aa}$; &c. Et Area bdDB $= \boxed{\frac{aa}{X}} - 2aX + XX - \frac{2X^3}{3a}$, &c., $- \boxed{\frac{aa}{x}} + 2ax - xx + \frac{2x^3}{3a} - \frac{x^4}{2aa}$; &c. Ubi signa $\boxed{\frac{aa}{x}}$; & $\boxed{\frac{aa}{X}}$ indicant exiguas Areas spectantes ad Terminos $\frac{aa}{x}$, & $\frac{aa}{X}$.

Nunc investigaturus $\boxed{\frac{aa}{x}}$; & $\boxed{\frac{aa}{X}}$, pono Ab, aut x esse definitam & bB indefinitam, aut Fluentem, quam idcirco voco $= y$;

ita ut sit $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$ Quantitas æqualis Areæ Hyperbolicæ, quæ adjacet ipsi bB, id est, $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}}$. Atqui, per Divisionem, invenio $\frac{aa}{x+y} = \frac{aa}{x} - \frac{aay}{xx} + \frac{aayy}{x^3} - \frac{aay^3}{x^4}$; &c. & ideo $\boxed{\frac{aa}{x+y}}$, aut $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} = \frac{aay}{x} - \frac{aayy}{2xx} + \frac{aay^3}{3x^3} - \frac{aay^4}{4x^4}$; &c.; ergo tota Area petita $bdDB = \frac{aay}{x} - \frac{aayy}{2xx} + \frac{aay^3}{3x^3}$; &c. $- 2aX + XX - \frac{2X^3}{3a}$; &c. $+ 2ax - xx + \frac{2x^3}{3a}$; &c.

Eodem pacto, si sumpsissem AB, aut X pro Lineâ definitâ, habuissem $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}} = \frac{aay}{X} + \frac{aayy}{2XX} + \frac{aay^3}{3X^3} + \frac{aay^4}{4X^4}$; &c.

TAB. VI. Quinimo, si (*Fig.* 37.) Bb bisecaretur in C, & AC assumeretur definitæ Longitudinis, & Cb ac CB indefinitæ; fac AC $= e$; & bC, aut $CB = y$, erit $bd = \frac{aa}{e-y} = \frac{aa}{e} + \frac{aay}{ee} + \frac{aayy}{e^3} + \frac{aay^3}{e^4} + \frac{aay^4}{e^5}$; &c. quapropter Area Hyperbolica adjacens Abscissæ parti bC, erit $= \frac{aay}{e} + \frac{aayy}{2ee} + \frac{aay^3}{3e^3} + \frac{aay^4}{4e^4} + \frac{aay^5}{5e^5}$; &c. Sed etiam $BD = \frac{aa}{e+y} = \frac{aa}{e} - \frac{aay}{ee} + \frac{aayy}{e^3} - \frac{aay^3}{e^4} + \frac{aay^4}{e^5}$; &c., & idcirco Area adjacens alteri Abscissæ parti $BC = \frac{aay}{e} - \frac{aayy}{2ee} + \frac{aay^3}{3e^3} - \frac{aay^4}{4e^4} + \frac{aay^5}{5e^5}$; &c. Ergo summa harum Arearum $= \frac{2aay}{e} + \frac{2aay^3}{3e^3} + \frac{2aay^5}{5e^5}$; &c. æquivalebit ipsi $\boxed{\frac{aa}{X}} - \boxed{\frac{aa}{x}}$.

Sic

Sic Æquationis $\dot{z}^3 + \dot{z}z + \dot{z} - x^3 = 0$, denotantis naturam Curvæ, Radix est $\dot{z} = x - \frac{1}{3} - \frac{2}{9x} + \frac{7}{81xx} + \frac{5}{81x^3}$; &c. Unde conficitur $z = \frac{1}{2}xx - \frac{x}{3} - \boxed{\frac{2}{9x}} - \frac{7}{81x} - \frac{5}{162xx}$; &c. Et Area bdDB $= \frac{1}{2}XX - \frac{1}{3}X - \boxed{\frac{2}{9X}} - \frac{7}{81X} - \frac{5}{162XX}$; &c. $- \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x + \boxed{\frac{2}{9x}} + \frac{7}{81x} + \frac{5}{162xx}$; &c, id est, $= \frac{1}{2}XX - \frac{1}{3}X - \frac{7}{81X}$; &c; $- \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x + \frac{7}{81x}$; &c. $- \frac{4y}{9e} - \frac{4y^3}{27e^3} - \frac{4y^5}{45e^5}$; &c.

Sed hi Termini Hyperbolici plerumque, & summo quidem commodo, possunt evitari immutato Abscissæ initio, id est, ipsâmet Abscissâ auctâ, vel diminutâ Quantitate aliquâ datâ. Ut, in primo Exemplo, in quo $\frac{a^3 - aax}{ax + xx} = \dot{z}$ erat Æquatio ad Curvam, si ponerem initium Abscissæ ad Punctum b, & assumptâ Ab alicujus datæ Longitudinis, $\frac{1}{2}a$, scriberem x pro reliquâ Abscissâ Bb; videlicet, si minuerem Abscissam Quantitate $\frac{1}{2}a$, scribens $x + \frac{1}{2}a$ pro x, Æquatio evaderet $\frac{\frac{1}{2}a^3 - aax}{\frac{3}{4}aa + 2ax + xx} = \dot{z}$; & (per Divisionem) $\dot{z} = \frac{2}{3}a - \frac{28}{9}x + \frac{200xx}{27a}$; &c., unde fit $z = \frac{2}{3}ax - \frac{14}{9}xx + \frac{200}{81a}x^3$; &c. $=$ Areæ bdDB.

Et sic, modò initium Abscissæ ponatur nunc ad hoc, nunc ad illud Punctum, Area Curvæ potest exprimi modis infinitis.

Etiam Æquatio $\frac{a^3 - aax}{ax + xx} = \dot{z}$ poterat resolvi in duas infinitas

Series $z = \frac{a^3}{xx} - \frac{a^4}{x^3} + \frac{a^5}{x^4}$; &c; $-a+x-\frac{xx}{a}+\frac{x^3}{aa}$; &c. ubi nullus invenitur Terminus divisus per primam Potestatem ipsius x. Sed genus hoc Serierum, in quarum unâ x in infinitum ascendit in Numeratoribus, & in alterâ in Denominatoribus, aptæ non sunt ad obtinendum ex iis valorem z, per Calculum arithmeticum, quando Species convertuntur in Numeros.

Si quis, postquam consecutus fuerit Areæ valorem in Speciebus, aggrediatur Calculum numericum, is non facilè in difficultates incidet. Attamen, ut major lux superioribus affundatur, addam unum, aut alterum Exemplum.

TAB. VI. Proponatur (*Fig.* 39.) Hyperbola AD, cujus Æquatio quidem est $\sqrt{x+xx} = z$, Vertex autem A, & uterque Axis æqualis Unitati. Juxta ea, quæ supra attulimus, Area ADB $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}}$; &c., id est, ea æquat $x^{\frac{1}{2}}$ in $\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}xx - \frac{1}{28}x^3 + \frac{1}{72}x^4 - \frac{5}{704}x^5$; &c., quæ Series in infinitum produci potest, multiplicando ultimum Terminum, per successivos Terminos hujus Progressionis $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5}x$; $\frac{-1 \cdot 5}{4 \cdot 7}x$; $\frac{-3 \cdot 7}{6 \cdot 9}x$; $\frac{-5 \cdot 9}{8 \cdot 11}x$; $\frac{-7 \cdot 11}{10 \cdot 13}x$; &c. Id est, primus Terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \times \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 5}x$ dat secundum Terminum $\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}$; Hic autem multiplicatus per $\frac{-1 \cdot 5}{4 \cdot 7}x$ conficit tertium $-\frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$; Qui rursus multiplicatus per $\frac{-3 \cdot 7}{6 \cdot 9}x$ facit $\frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$ quartum; & sic in infinitum.

Jam, tribuatur ipsi AB data quævis Longitudo, puta, $\frac{1}{4}$ & pro x scribatur hic Numerus, ejúsque Radix $\frac{1}{2}$ pro $x^{\frac{1}{2}}$: tunc primus Terminus $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, aut $\frac{2}{3} \times \frac{1}{8}$ reductus ad Fractiones decimales

evadit

evadit 0,083333333; &c. Hic in $\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$ ductus conficit 0,00625 secundum Terminum; Qui ductus in $\frac{-1 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 7}$ præbet $-$ 0,0002790178; &c., tertium Terminum. Atque ita porrò. At in duas Tabulas distribuo Terminos, quos ita gradatim invenio; ponens Affirmativos in earum unâ, negativos autem in alterâ, & illos addo, ut hìc factum vides.

Affirmativi	Negativi
+ 0,0833333333333333	$-$ 0,0002790178571429
6250000000000	3467906605I
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	$-$ 0,0002825719389575
1	+ 0,0896109885646518
+ 0,0896109885646518	0,0893284166257043

Deinde ex Affirmativorum summâ detraho summam negativorum, superest 0,0893284166257043, quæ est Quantitas Areæ hyperbolicæ ADB. Quod erat inveniendum.

Nunc, proponatur (*Fig.* 39.) Circulus A*d*F qui exprimitur **TAB. VI.** Æquatione $\sqrt{x - xx} = z$, cujus nempe Diameter Unitas est, ac (juxta jam dicta) ejus Area A*d*B erit $\frac{2}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28} x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72} x^{\frac{9}{2}}$; &c. Cùm autem in hâc Serie, Termini nullo pacto differant à Terminis Seriei, quâ superiùs exposita fuit Area hyperbolica, nisi signis + & $-$; tantùm connectendi, supersunt iidem Termini cum diversis signis; Subtrahendum est, scilicet, Aggregatum ex ambabus superiorum Tabularum Summis 0,0898935605036193,

ex duplo primi Termini 0, 166666666666666666; &c., & quod reftat, nempe, 0, 0767731061630473 erit pars AdB Areæ circularis, fuppofitâ Rectâ AB quadrante Diametri. Hìc obfervare potes, quòd, licèt Area circularis cum hyperbolicâ conferri nequeat, geometricè rem confiderando, tamen ambas deteximus eodem Calculo arithmeticò.

Circuli parte AdD fic inventâ, hìnc erui poteft tota Area. Etenim age Radium dC, & multiplica Bd, aut $\frac{1}{4}\sqrt{3}$ in BC vel $\frac{1}{4}$, & Producti femiffis, id eft, $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, aut 0, 0541265877365275 erit valor Trianguli CdB; hoc adde Areæ AdB, & affequeris Sectorem ACd = 0, 1308996938995747, qui fextuplicatus, id eft, 0, 785398163397448 2 dabit totam Aream.

Hinc, obiter, detegetur Longitudo Peripheriæ, (quæ erit 3, 14159265358979 28,) dividendo fcilicet Aream per Diametri quadrantem.

His addere libet Calculum Areæ comprehenfæ inter Hyperbolam TAB. VI. dFD (*Fig.* 40.) & ejus Afymptotum CA. Sit C Hyperbolæ Centrum, & faciendo $CA = a$, $AF = b$, & $AB = Ab = x$: erit $\frac{ab}{a+x} = BD$ & $\frac{ab}{a-x} = bd$; igitur Area $AFDB = bx - \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} - \frac{bx^4}{4a^3}$; &c., & Area $AFdb = bx + \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} + \frac{bx^4}{4a^3}$; &c., earúmque Summa $dbBD = 2bx + \frac{2bx^3}{3aa} + \frac{2bx^5}{5a^4} + \frac{2bx^7}{7a^6}$; &c. Jam fuppone $AC = AF = 1$ & AB aut $Ab = \frac{1}{10}$; exiftentibus $Cb = 0,9$, & $CB = 1, 1$, ac fubftituendo hos Numeros pro a, b, & x, primus Seriei Terminus evadit 0, 2, fecundus 0, 00066666666 &c., tertius 0, 000004, & fic deinceps, ut vides in appofitâ Tabellâ.

$$
\begin{array}{lr}
 & 0,2000000000000000 \\
 & 6666666666666 \\
 & 40000000000 \\
 & 285714286 \\
 & 2222222 \\
 & 18182 \\
 & 154 \\
 & 1 \\
\hline
\text{Summa} & 0,2006706954621511 = \text{Areæ } bd\text{DB.}
\end{array}
$$

Si ſeorſum habere velles Areæ partes Ad & AD, ſubduc minorem AB ex majore Ad, & ſupereſſe perſpicies $\frac{bxx}{a} + \frac{bx^4}{2a^3} + \frac{bx^6}{3a^5} + \frac{bx^8}{4a^7}$; &c., ubi ſcriptis 1 pro a & b, ac $\frac{1}{10}$ pro x & Terminis ad Fractiones decimales revocatis, habebis.

$$
\begin{array}{lr}
 & 0,0100000000000000 \\
 & 500000000000 \\
 & 3333333333 \\
 & 25000000 \\
 & 200000 \\
 & 1667 \\
 & 14 \\
\hline
\text{Summa} & 0,0100503358535014 = \text{A}d - \text{AD.}
\end{array}
$$

Jam, ſi hæc Arearum Differentia addatur earum Summæ jam repertæ, aut ab eâ ſubtrahatur, dimidium Aggregatum 0,1053605156578263 erit Area major Ad, & demidium reliquum 0,0953101798043248 erit minor Area AD.

Quin, tametſi ſupponas AB & A$b = \frac{1}{100}$, vel CB $= 1,01$ & C$b = 0,99$, excudere potes ex iiſdem Tabulis Areas iſtas AD & Ad dummodò Numeros legitimè transferas in inferiora loca, ut hìc factum vides.

Q

0,02000000000000000 0,00010000000000000
6666666666 50000000
4000000 3333
28 Summa 0,0001000050003333 = Ad − AD
Summa 0,0200006667066694 = bD
Dimidium Aggregatum Dimidium Refiduum
0,0100503358535014 = Ad 0,0099503308531681 = AD

Eodem pacto, fi ponas AB & Ab = $\frac{1}{1000}$, aut CB = 1,001, & Cb = 0,999; habebis Aream Ad = 0,0010005003335835, & AD = 0,0009995003330835.

Ita pariter, (fi AC & AF = 1,), faciendo AB & Ab = 0,2, aut 0,02, aut 0,002 exfurgent Areæ.

Ad = 0, 2231435513142097.
vel Ad = 0, 0202027073175194.
vel Ad = 0, 002002.
& AD = 0, 1823215567939546.
& AD = 0, 0198026272961797.
& AD = 0, 001.

Ex his Areis ita repertis facilè deduci poffunt aliæ per folas Additiones & Subftractiones. Ut enim $\frac{1,2}{0,8}$ in $\frac{1,2}{0,9} = 2$, Summa 0, 6931471805599453 Arearum pertinentium ad Rationes $\frac{1,2}{0,8}$ & $\frac{1,2}{0,9}$, (id eft, infiftentium fuper Abfciffæ partes 1,2 — 0,8, & 1,2 — 0,9,) erit Area AF $\delta\beta$, pofitâ Cβ = 2, ut notum eft.

Rurfus quia $\frac{1,2}{0,8}$ in 2 = 3, Summa 1, 0986122886681097 Arearum pertinentium ad $\frac{1,2}{0,8}$ & 2 erit AF$\delta\beta$ fi Cβ eft 3.

Item quia $\frac{2\times2}{0,5} = 5$, & $2\times5 = 10$, per legitimam Arearum Addi-

Additionem reperies 1,6093379124341004 = AF$\delta\beta$, quando CB = 5; & 2,302585092994045 7 = AF$\delta\beta$, cùm CB = 10.

Sic pariter, quia 10 × 10 = 100, & 10 × 100 = 1000, ac $\sqrt{5 \times 10 \times 0,98} = 7$, ac $10 \times 1,1 = 11$, ac $\frac{1000 \times 1,001}{7 \times 11} = 13$, ac $\frac{100 \times 0,998}{2} = 499$, palam eſt quòd Area AF$\delta\beta$ reperiri poteſt per compoſitionem Arearum ſupra inventarum, quando Cβ = 100; 1000; 7, aut cuivis alteri ſupra dictorum Numerorum, ſtante ſemper AB = BF = 1.

Hæc ad id ſpectant, ut palam fiat, quòd hinc deduci poteſt Methodus valde concinna, quà conſtrui poteſt Canon Logarithmorum, qui determinant Areas hyperbolicas, (è quibus Areis erui facilè poſſunt Logarithmi) & qui reſpondent Numeris primitivis quotquot ſunt, & id ſolùm per duas Operationes non nimis perplexas.

Sed, cùm hic Canon ex hoc fonte meliùs quàm ex alio quolibet derivari videatur, quid fiet, ſi eorum Conſtructionem hìc indico, quò magis perfectum ſit opus?

Primùm igitur, aſſumptis 0 pro Logarithmo Numeri 1, & 1 pro Logarithmo Numeri 10, ut vulgò fit; Logarithmi Numerorum primitivorum 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 37, inveſtigandi ſunt, dividendo Areas Hyperbolicas nuper inventas per 2,3025850929940457, quæ eſt Area reſpondens Numero 10; vel, (quod idem eſt,) multiplicando eas per hujus reciprocam 0,4342944819032518.

Sic, *ex. gr.*, ſi 0,69314718, &c., eſt Area reſpondens Numero 2, ea multiplicata per 0,43429 &c., facit 0,3010299956639812 Logarithmum Numeri 2.

Deinde Logarithmi aliorum Numerorum, qui ſunt in Canone, & qui componuntur horum Multiplicatione, inveniendi ſunt per Additionem Logarithmorum ad eos pertinentium, ut fieri ſolet. Ac loca inania poſtea ſunt interpolanda ope ſequentis Theorematis.

THEOR. I.

Sit n Numerus, cui Logarithmus aptari debet, & x differentia inter hunc & duos proximos Numeros æqualiter utrinque diſſitos,

& quorum Logarithmi jam inventi ſint, & ſit d dimidiata Logarithmorum differentia. Tunc optatus Numeri n Logarithmus obtinebitur addendo Quantitatem $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$ &c. Logarithmo minoris Numeri.

Nam, ſi Numeri exponantur per Cp, $C\beta$ & CP; & ſit Rectangulum CBD aut $C\beta\delta = 1$, ut anteà; & agantur Ordinatæ pq & PQ; ſcribatur n pro $C\beta$, & x pro βp aut βP, Area $pqQP$ aut $\frac{2x}{n} + \frac{2x^3}{3n^3} + \frac{2x^5}{5n^5}$; &c., erit ad Aream $pq\delta\beta$ aut $\frac{x}{n} + \frac{xx}{2nn} + \frac{x^3}{3n^3}$; &c. ut differentia quæ eſt inter extremorum Numerorum Logarithmos, vel $2d$, ad differentiam quæ eſt inter Logarithmos minoris & medii, quæ idcirco erit $\dfrac{\frac{dx}{n} + \frac{dxx}{2nn} + \frac{dx^3}{3n^3};\ \&c.}{\frac{x}{n} + \frac{x^3}{3n^3} + \frac{x^5}{5n^5};\ \&c.}$, id eſt (factâ Diviſione) $d + \frac{dx}{2n} + \frac{dx^3}{12n^3}$; &c.

Hujus Seriei duo primi Termini $d + \frac{dx}{n}$ erunt, puto, ſatis accurati ad conſtruendum Canonem Logarithmorum, quanquam Logarithmi ad quatuordecim vel quindecim Figuras uſque producendi forent; dummodò tamen Numeri, quorum Logarithmi ſunt inveniendi, non ſint infra 1000. Quod vix moleſtiam faceſſere poſſet ei qui computat, quia x paſſim unitas eſt aut binarium. Sed tamen non neceſſariò loca omnia interpolanda ſunt per hanc Regulam. Nam, Logarithmi Numerorum, qui conflantur per Multiplicationem aut Diviſionem Numerorum jam inventorum, excudi poſſunt ex Numeris, quorum Logarithmi reperti jam ſunt, addendo ſcilicet, aut ſubducendo Logarithmos iſtos. Quinimo etiam per Logarithmorum differentias primas, ſecundas, tertias, &c., ſi res poſtulat, impleri poſſunt loca inania, & quidem expeditè. Superior autem Regula ſolùm adhibenda eſt, quando plura loca plena deinceps deſunt, ut ſic inveniantur eorum differentiæ.

Eâdem Methodo poſſunt inveniri Regulæ, pro Logarithmorum interca-

intercalatione; quando ex tribus Numeris dantur Logarithmi, pertinentes ad medium & minimum, aut ad medium & maximum, quamquam Numeri non conſtituant arithmeticam Progreſſionem.

Quinetiam, facilè, hujus Methodi veſtigia premendo detegi poſſunt Regulæ utiles ad conſtruendas Tabulas Sinuum & Tangentium artificialium ſine naturalium auxilio: Sed hæc obiter.

Hactenus locuti ſumus de Quadraturâ Curvarum, quæ exprimuntur Æquationibus conſtantibus ex Terminis complicatis, & id per harum Æquationum Reductionem, ad alias quæ conflantur infinito ſimplicium Terminorum numero. Cùm autem hæ Curvæ poſſint aliquando quadrari etiam per Æquationes finitas, aut quomodocumque comparari cum aliis Curvis, quarum Areæ quodam modo haberi poſſunt pro datis; cujus generis ſunt Sectiones conicæ. Ideo non extra rem putavi hìc afferre duos ſequentes Catalogos, aut Tabulas Theorematum, quas pollicitus eram, quáſque conſtruxi ope ſuperiorum Propoſitionum VII. & VIII.

Harum Tabularum prima exhibet Areas Curvarum quæ quadrari poſſunt. Secunda verò continet Curvas, quarum Areæ conferri poſſunt cum Sectionum conicarum Areis. In utrâque litteræ d; e; f; g; h, denotant datas Quantitates quaſcumque, x & z Curvarum Abſciſſas, u & y Ordinatas parallelas, s & t Areas, ut priùs. Sed litteræ η & θ adnexæ z, indicant Numerum Dimenſionum ipſius z, ſive is ſit integer, ſive fractus, ſive affirmativus ſive negativus: Ut ſi $\eta = 3$, tunc $z^{\eta} = z^{3}$; $z^{2\eta} = z^{6}$, $z^{-\eta} = z^{-3}$ aut $\frac{1}{z^{3}}$; $z^{\eta+1} = z^{4}$; & $z^{\eta-1} = zz$.

Præterea in Arearum valoribus ſcripſi, brevitatis cauſâ, R pro Radicalibus $\sqrt{e + fz^{\eta}}$ aut $\sqrt{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}}$, & p pro $\sqrt{h + iz^{\eta}}$, quibus afficitur valor Ordinatæ y.

Tabula I. continens aliquas Areas Curvilineas relatas ad rectilin. Figuras, constructa per Probl. VII.

Ordo Curvarum			Arearum Valor
I		$dz^{\eta - 1} = y$	$\frac{d}{\eta} z^{\eta} = t$
II		$\frac{dz^{\eta - 1}}{ee + 2efz^{\eta} + ffz^{2\eta}} = y$	$\frac{dz^{\eta}}{\eta ee + \eta efz^{\eta}} = t$, aut $\frac{-d}{\eta ef + \eta ffz^{\eta}} = t.$
III	1	$dz^{\eta - 1}\sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\frac{2d}{3\eta f} R^3 = t$
	2	$dz^{2\eta - 1}\sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\frac{-4e + 6fz^{\eta}}{15\eta ff} dR^3 = t$
	3	$dz^{3\eta - 1}\sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\frac{16ee - 24efz^{\eta} + 30ffz^{2\eta}}{105\eta f^3} dR^3 = t$
	4	$dz^{4\eta - 1}\sqrt{e + fz^{\eta}} = y$	$\frac{-96e^3 + 144eefz^{\eta} - 180effz^{2\eta} + 210f^3z^{3\eta}}{945\eta f^4} dR^3 = t$
IV	1	$\frac{dz^{\eta - 1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} = y$	$\frac{2d}{\eta f} R = t$
	2	$\frac{dz^{2\eta - 1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-4e + 2fz^{\eta}}{3\eta ff} dR = t$
	3	$\frac{dz^{3\eta - 1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} = y$	$\frac{16ee - 8efz^{\eta} + 6ffz^{2\eta}}{15\eta f^3} dR = t$
	4	$\frac{dz^{4\eta - 1}}{\sqrt{e + fz^{\eta}}} = y$	$\frac{-96e^3 + 48eefz^{\eta} - 36effz^{2\eta} + 30f^3z^{3\eta}}{105\eta f^4} dR = t$

	Ordo Curvarum	Arearum Valor
V 1	$2\theta e z^{\theta-1} \begin{array}{l} +2\theta f z^{\theta+\eta-1} \\ +3\eta f \end{array} \quad * \; * \quad \text{in } \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$	$z^{\theta}R^{3}=t$
V 2	$2\theta e z^{\theta-1} \begin{array}{l} +2\theta f z^{\theta+\eta-1} \\ +3\eta f \end{array} \begin{array}{l} +2\theta g z^{\theta+2\eta-1} \\ +6\eta g \end{array} \quad \text{in } \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$z^{\theta}R^{3}=t$
VI 1	$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta+\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$z^{\theta}R=t$
VI 2	$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta+\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta+2\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$z^{\theta}R=t$
VII 1	$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta-\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{\overline{e+fz^{\eta}}\times 2\sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}}{R}=t$
VII 2	$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta-\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta-2\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{\overline{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}\times 2\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}}{R}=t$
VIII 1	$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta-2\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+ffz^{2\eta}}=2y$	$\frac{z^{\theta}}{RR}$ aut $(\frac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}})=t$
VIII 2	$\frac{2\theta e z^{\theta-1}+\overline{2\theta-2\eta}\times fz^{\theta+\eta-1}+\overline{2\theta-4\eta}\times gz^{\theta+2\eta-1}}{ee+2efz^{\eta}+\overline{ff+2eg}\times z^{2\eta}+2fgz^{3\eta}+ggz^{4\eta}}=2y$	$\frac{z^{\theta}}{RR}$ aut $\frac{z^{\theta}}{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=t$
IX	$2\theta e h z^{\theta-1} \begin{array}{l} +\overline{2\theta+3\eta}\times fhz^{\theta+\eta-1} \\ +\overline{2\theta+\eta}\times ei \end{array} +\overline{2\theta+4\eta}\times fiz^{\theta+2\eta-1} \quad \text{in } \frac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{2\sqrt{h+iz^{\eta}}}=y$	$z^{\theta}R^{3}p=t$
X	$2\theta e h z^{\theta-1} \begin{array}{l} +\overline{2\theta+3\eta}\times fhz^{\theta+\eta-1} \\ +\overline{2\theta-\eta}\times ei \end{array} +\overline{2\theta+2\eta}\times fiz^{\theta+2\eta-1} \quad \text{in } \frac{\sqrt{e+fz^{\eta}}}{\overline{h+iz^{\eta}}\times\sqrt{h+iz^{\eta}}}=y$	$\frac{z^{\theta}R^{3}}{p}=t$

V 3 Addere

Addere potuissem alia plura ejusdem generis: sed jam transire libet ad aliud Curvarum genus, quæ cum Sectionibus conicis comparari possunt. Curvæ omnes, de quibus agit sequens Catalogus aut Tabula, repræsentantur (*Fig.* 41.) Lineis $QE\chi R$. Harum Abscissæ incipiunt ab A, & sunt AC, Ordinatæ CE, initium Areæ $\alpha\chi$, & Area descripta $\alpha\chi EC$. At initium Areæ, vel primus Terminus (qui plerumque aut initium ducit ab Abscissæ initio A, aut ab eo distat per infinitum intervallum,) invenitur repertâ Longitudine Abscissæ $A\alpha$, cùm Areæ valor evanescit & erectâ Perpendiculari $\alpha\chi$.

TAB. VI.

Eodem pacto habes Sectiones conicas repræsentatas (*Fig.* 42. *Nis*. 1. 2. 3. 4.) Lineis PDG quarum Centrum est A, Vertex a, Semidiametri rectangulares Aa & AP, initium Abscissæ A aut a aut α, Abscissa AB vel aB vel αB, Ordinata BD, Tangens DT, quæ occurrit ipsi AB in T, subtensa aD, & Rectangulum inscriptum aut circumscriptum ABDO.

TAB. VI.

Servatis igitur symbolis supra constitutis, erit $AC = z$; $CE = y$; $\alpha\chi EC = t$; AB vel $aB = x$; $BD = u$; & ABDP aut $aGDB = s$. Et præterea, si quando duæ Sectiones conicæ necessariæ erunt ad Aream aliquam determinandam; Area secunda dicetur σ, ejus Abscissa ξ, & Ordinata γ. Ponitur autem p pro $\sqrt{ff - 4eg}$.

Tab. II.

Tabula II. continens aliquas Areas Curvilineas relatas ad Conicas Sectiones constructa per Probl. VIII.

Formæ Curvarum			Sectionis Conicæ		Arearum Valor	Fig.
			Abscissæ.	Ordinatæ.		
I	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^\eta}=y$	$z^\eta=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{1}{\eta}s=t=\frac{aGDB}{\eta}$	N°. 1.
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^\eta}=y$	$z^\eta=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{d}{\eta f}z^\eta-\frac{e}{\eta f}s=t$	
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{e+fz^\eta}=y$	$z^\eta=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{d}{2\eta f}z^{2\eta}-\frac{de}{\eta ff}z^\eta+\frac{ee}{\eta ff}s=t$	
II	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2ux-4s}{\eta}=t=\frac{4}{\eta}ADGa$	N° 3.4.
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2d}{\eta f}z^{\frac{1}{2}\eta}+\frac{4es-2eux}{\eta f}=t$	
	3	$\frac{dz^{\frac{5}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2d}{3\eta f}z^{\frac{3}{2}\eta}-\frac{2de}{\eta ff}z^{\frac{1}{2}\eta}+\frac{2eeux-4ees}{\eta ff}=t$	
III	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^\eta}=y$	$\frac{1}{z^\eta}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{4de}{\eta f}\times\overline{\frac{u^3}{2ex}-s}=t=\frac{4de}{\eta f}$ in $aGDT$, aut in $APDB\div TDB$	N°. 2. 3. 4.
		aut sic	$\frac{1}{z^\eta}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{8dee}{\eta ff}\times\overline{s-\frac{1}{2}ux-\frac{fu}{4e}+\frac{ffu}{4eex}}=t=\frac{8dee}{\eta ff}$ in $AGDa+\frac{ffu}{4eex}$	N°. 3. 4.
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}}\sqrt{e+fz^\eta}=y$	$\frac{1}{z^\eta}=xx$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{-2d}{\eta}s=t=\frac{2d}{\eta}APDB$, seu $\frac{2d}{\eta}aGDB$	N°. 2. 3. 4.
		aut sic	$\frac{1}{z^\eta}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{4de}{\eta f}\times\overline{s-\frac{1}{2}xu-\frac{fu}{2e}}=t=\frac{4de}{\eta f}\times aGDK$	N°. 3. 4.
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}}\sqrt{e+fz^\eta}=y$	$\frac{1}{z^\eta}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{-d}{\eta}s=t=\frac{d}{\eta}\times-aGDB$, aut $BDPK$	N°. 4.
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}}\sqrt{e+fz^\eta}=y$	$\frac{1}{z^\eta}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{3dfs-2du^3}{6\eta e}=t$	
IV	1	$\frac{d}{z\sqrt{e+fz^\eta}}=y$	$\frac{1}{z^\eta}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{4d}{\eta f}\times\overline{\frac{1}{2}xu\div s}=t=\frac{4d}{\eta f}$ in PAD, aut in $aGDA$	N°. 2. 3. 4.
		aut sic	$\frac{1}{z^\eta}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{8de}{\eta ff}\times\overline{s-\frac{1}{2}xu-\frac{fu}{4e}}=t=\frac{8de}{\eta ff}$ in $aGDA$	N°. 3. 4.
	2	$\frac{d}{z^{\eta+1}\sqrt{e+fz^\eta}}=y$	$\frac{1}{z^\eta}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{2d}{\eta e}\times\overline{s-xu}=t=\frac{2d}{\eta e}$ in POD, aut in $AODGa$	N°. 2. 3. 4
		aut sic	$\frac{1}{z^\eta}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{4d}{\eta f}\times\overline{\frac{1}{2}xu\div s}=t=\frac{4d}{\eta f}$ in $aDGa$	N°. 3. 4.
	3	$\frac{d}{z^{2\eta+1}\sqrt{e+fz^\eta}}=y$	$\frac{1}{z^\eta}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{d}{\eta e}\times\overline{3s\div 2xu}=t=\frac{d}{\eta e}$ in $3aDGa\div aDB$ Triang.	N°. 3. 4.
	4	$\frac{d}{z^{3\eta+1}\sqrt{e+fz^\eta}}=y$	$\frac{1}{z^\eta}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{10dfxu-15dfs-2dexxu}{6\eta ee}=t$	
V	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{ff-4eg}{4gg}xx}=u$	$\frac{xu-2s}{\eta}=t$	
		aut sic	$\sqrt{\frac{dz^{2\eta}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{ff-4eg}{4ee}xx}=u$	$\frac{2s-xu}{\eta}=t$	
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}}=x$ $fz^\eta+gz^{2\eta}=\xi$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{ff-4eg}{4gg}xx}=u$ $\frac{1}{e+\xi}=\gamma$	$\frac{d\sigma+2fs-fxu}{2\eta g}=t$	
VI	1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{2dp}{f-p+2gz^\eta}}=x$ $\sqrt{\frac{2dg}{f+p+2gz^\eta}}=\xi$	$\sqrt{d+\frac{-f+p}{2g}xx}=u$ $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2g}\xi\xi}=\gamma$	$\frac{2xu-4s-2\xi\gamma+4\sigma}{\eta p}=t$	
	2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e+fz^\eta+gz^{2\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{2dez^\eta}{fz^\eta-pz^\eta+2e}}=x$ $\sqrt{\frac{2dez^\eta}{fz^\eta+pz^\eta+2e}}=\xi$	$\sqrt{d+\frac{-f-p}{2e}xx}=u$ $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2e}\xi\xi}=\gamma$	$\frac{4s-2xu-4\sigma+2\xi\gamma}{\eta p}=t$	

		Formæ Curvarum.	Conicæ Sectiones. Abscissæ.	Ordinatæ.	Arearum Valor. *Fig.* 41.
VII	1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$; $\frac{1}{z^{\eta}}=\xi$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$; $\sqrt{g+f\xi+e\xi\xi}=\gamma$	$\frac{4de\xi\gamma+2def\gamma-2dfgux-2dffu-8dee\sigma+4dfgs+4degu}{4\eta eg-\eta ff}=t$ N°. 2. 3. 4.
	2	$dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{d}{\eta}s=t=\frac{d}{\eta}\times\alpha GDB$ N°. 3. 4.
	3	$dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{d}{3\eta g}u^3-\frac{df}{2\eta g}s=t$ N°. 2. 3. 4.
	4	$dz^{3\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{6dgx-5df}{24\eta gg}u^3+\frac{5dff-4deg}{16\eta gg}s=t$ N°. 3. 4.
VIII	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{8dgs-4dgux-2dfu}{4\eta eg-\eta ff}=t=\frac{8dg}{4\eta eg-\eta ff}\times\alpha GDB\pm DBA$ Triang. N°. 3. 4.
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{-4dfs+2dfux+4deu}{4\eta eg-\eta ff}=t$
	3	$\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{\begin{matrix}+3dff\\-4deg\end{matrix}s\begin{matrix}-2dff\\+4deg\end{matrix}ux-2defu}{4\eta egg-\eta ffg}=t$
	4	$\frac{dz^{4\eta-1}}{\sqrt{e+fz^{\eta}+gz^{2\eta}}}=y$	$z^{\eta}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{\begin{matrix}+36defg\\-15df^3\end{matrix}s\begin{matrix}+8degg\\-2dffg\end{matrix}uxx\begin{matrix}+10df^3\\-28defg\end{matrix}ux\begin{matrix}+10deff\\-16deeg\end{matrix}u}{24\eta eg^3-6\eta ffgg}=t$
IX	1	$\frac{dz^{\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}xx}=u$	$\frac{\begin{matrix}+4fg\\-4eh\end{matrix}s\begin{matrix}-2fg\\+2eh\end{matrix}ux+\frac{2dfu}{x}}{\eta fh}=t$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}}{g+hz^{\eta}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}xx}=u$	$\frac{\begin{matrix}+4egh\\-4fgg\end{matrix}s\begin{matrix}-2egh\\+2fgg\end{matrix}ux+\frac{2}{3}dh\frac{u^3}{x^3}-2dfg\frac{u}{x}}{\eta fhh}=t$
X	1	$\frac{dz^{\eta-1}}{g+hz^{\eta}\ \sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}xx}=u$	$\frac{2ux-4s}{\eta f}=t=\frac{4}{\eta f}ADGa$
	2	$\frac{dz^{2\eta-1}}{g+hz^{\eta}\ \sqrt{e+fz^{\eta}}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^{\eta}}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}xx}=u$	$\frac{4gs-2gux+\frac{2du}{x}}{\eta fh}=t$
XI	1	$dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\sqrt{g+hz^{\eta}}=x$; $\sqrt{h+gz^{-\eta}}=\xi$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}xx}=u$; $\sqrt{\frac{fg-eh}{g}+\frac{e}{g}\xi\xi}=\gamma$	$\frac{2du^3xz^{-\eta}-4dfs-4de\sigma}{\eta fg-\eta eh}=t$
	2	$dz^{\eta-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\sqrt{g+hz^{\eta}}=x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}xx}=u$	$\frac{2d}{\eta h}s=t$
	3	$dz^{2\eta-1}\sqrt{\frac{e+fz^{\eta}}{g+hz^{\eta}}}=y$	$\sqrt{g+hz^{\eta}}=x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}xx}=u$	$\frac{dhu^3x\begin{matrix}-3dfg\\-deh\end{matrix}s}{2\eta fhh}=t$

Antequam ad Exemplis illuſtranda Theoremata in hiſce Curvarum claſſibus tradita pertranſeam, obſervandum puto, quòd.

I.

Cùm in Æquationibus Curvas exprimentibus ſemper poſuerim omnia Quantitatum d; e; f; g; h, & i, ſigna affirmativa, ſi quando ea negativa occurrunt, mutanda ſunt in ſubſequentibus valoribus Abſciſſæ & Ordinatæ ad conicam Sectionem pertinentium, atque etiam Areæ quæſitæ.

I I.

Quinetiam cùm ſigna ſiymbolorum Numeralium η & θ negativa ſunt, mutari debent in Arearum valoribus. His autem ſignis mutatis, Theoremata ipſa novam formam induunt.

Sic, ſi ſignum ipſius η mutetur in quartâ formâ Tabulæ II, tertium Theorema evadit $\frac{d}{z^{-2\eta+1}\sqrt{e+fz^{-\eta}}} = y$; $\frac{1}{z^{-\eta}} = x$, &c., id eſt, $\frac{dz^{3\eta-1}}{\sqrt{ez^{2\eta}+fz^{\eta}}} = y$; $z^{\eta} = x$; $\sqrt{fx+exx} = u$; $\frac{d}{\eta e} \times \overline{2ux-3s} = t$. Quod in ceteris quoque obſervandum eſt

I I I.

Series ſingulorum ordinum, præter ſecundum Tabulæ I, continuari in infinitum utrimque poſſunt. Etenim in Seriebus tertii & quarti ordinis Tabulæ I. Numerales primorum Terminorum Coefficientes (2; -4; 16; -96; 768; &c.,) conflantur continuâ Multiplicatione Numerorum -2; -4; -6; -8; -10; &c., & Coefficientes ſequentium Terminorum deducuntur ex priorum Coefficientibus, in tertio quidem ordine, eos gradatim multiplicando per $-\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{4}$; $-\frac{7}{6}$; $-\frac{9}{8}$; $-\frac{11}{10}$; $-\frac{13}{12}$; &c.,

&c., & in quarto per $-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{5}{6}; -\frac{7}{8}; -\frac{9}{10}; -\frac{11}{12}$; &c.; At Denominatorum Coefficientes 1; 3; 15; 105; &c., conficiuntur invicem gradatim multiplicando Numeros 1; 3; 5; 7; 9; &c.

Veniamus ad Tabulam II. Series Ordinum primi, fecundi, tertii, quarti, noni, & decimi, in infinitum producuntur folâ Divifione. Habes, *ex.gr.* in primo ordine $\frac{dz^{4\eta-1}}{e+fz^\eta} = y$; unde, fi Divifionem protrahas ad convenientem periodum, affequeris

$$\frac{d}{f}z^{3\eta-1} - \frac{de}{ff}z^{2\eta-1} + \frac{dee}{f^3}z^{\eta-1} - \frac{\frac{de^3}{f^3}z^{\eta-1}}{e+fz^\eta} = y.$$

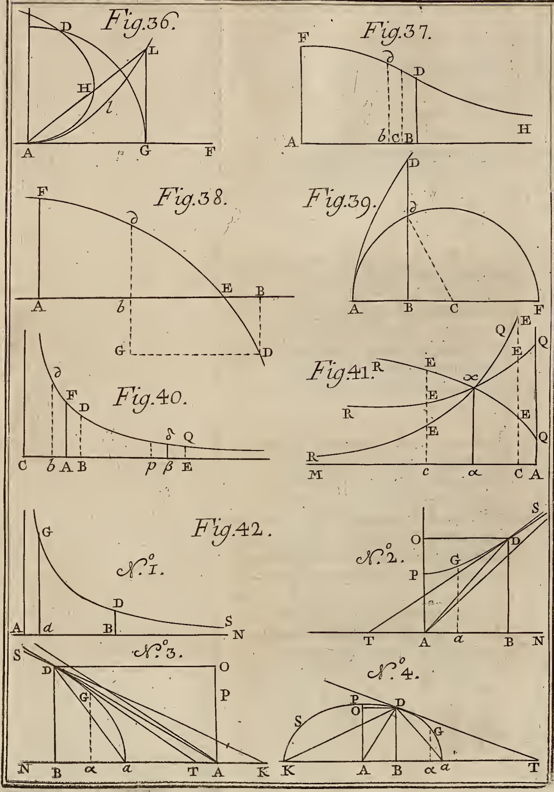
Tres primi Termini fpectant ad primum Ordinem Tabulæ I. & quartus ad primam Speciem hujus Ordinis. Hinc patet quòd Area eft $\frac{d}{3\eta f}z^{3\eta} - \frac{de}{2\eta ff}z^{2\eta} + \frac{dee}{\eta f^3}z^\eta - \frac{e^3}{\eta f^3}s$, ponendo s pro Areâ Sectionis conicæ, cujus Abfciffa eft $x = z^\eta$ & Ordinata $u = \frac{d}{e+fx}$.

Series autem Ordinum quinti & fexti continuari poffunt in infinitum ope duorum Theorematum conftituentium quintum Ordinem Tabulæ I. per legitimam Additionem & Subftractionem. Series autem feptimi & octavi ope Theorematum fexti Ordinis Tabulæ I. & & Series undecimi, auxilio Theorematis decimi Ordinis ejufdem Tabulæ I.

Continuanda fit, *ex gr.*, Series tertii Ordinis Tabulæ II. fuppone $\theta = -4\eta$, & primum Theorema quinti Ordinis Tabulæ I. fiet $\overline{-8\eta e z^{-4\eta-1} - 5\eta f z^{-3\eta-1}} \times \frac{1}{2}\sqrt{e+fz^\eta} = y$; $\frac{R^3}{z^{4\eta}} = t$.

Sed juxta quartum Theorema hujus Seriei producendæ, fcribendo $-\frac{5\eta f}{2}$ pro d, eft $-\frac{5\eta}{2}fz^{-3\eta-1}\sqrt{e+fz^\eta} = y$; $\frac{1}{z^\eta} = x$;

$\sqrt{fx}$


Fig. 36.
D
H
L
l
A
G
F
Fig. 37.
F
∂
D
H
A
b
C
B
Fig. 38.
F
∂
E
B
A
b
G
D
Fig. 39.
D
∂
A
B
C
F
Fig. 40.
∂
F
D
δ
Q
C
b
A
B
p
β
E
Fig. 41.
R
E
Q
∞
R
R
M
c
α
C
A
Fig. 42.
N.° 1.
G
D
S
A
d
B
N
N.° 2.
S
O
D
G
P
T
A
a
B
N
N.° 3.
S
D
O
P
G
N
B
α
a
T
A
K
N.° 4.
P
O
D
S
G
K
A
B
α
a
T

$\sqrt{fx+exx}=u$; & $\frac{10fu^3-15ffs}{12e}=t$, ergo ſubtrahendo primos valores y & t, ſupereſt $4\eta e z^{-4\eta-1}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$; $\frac{10fu^3-15ffs}{12e}-\frac{R^3}{z^{4\eta}}=t$. His multiplicatis per $\frac{d}{4\eta e}$, & (ſi libet) pro $\frac{R^3}{z^{4\eta}}$ ſcripto u^3x, prodibit quintum Theorema Seriei producendæ, nempe $\frac{d}{z^{4\eta+1}}\sqrt{e+fz^{\eta}}=y$; $\frac{1}{z^{\eta}}=x$; $\sqrt{fx+exx}=u$; & $\frac{10dfu^3-15dffs}{48\eta ee}-\frac{du^3x}{4\eta e}=t$.

I V.

Plures ex his Ordinibus poſſunt etiam aliter ex aliis excudi. Sic, in Tabulâ II. quintus, ſextus, ſeptimus, & undecimus ex octavo, & nonus ex decimo: Ita ut eos omiſiſſe potuiſſem, niſi poſſent eſſe alicujus utilitatis, quamquam non omninò neceſſarii ſint. Omiſi tamen plures Ordines quos educere potuiſſem ex primo & ſecundo, ut & ex nono & decimo ob Denominatores complicatos nimis, quibus afficiuntur, quâ de cauſâ non facilè utiles eſſe poſſunt.

V.

Si Æquatio Curvam definiens compoſita eſt ex pluribus Æquationibus diverſorum Ordinum aut diverſarum Specierum ejuſdem ordinis, ejus Area pariter compoſita erit ex correſpondentibus Areis. Semper autem curandum eſt ut eæ rectè connectantur aptis ſignis. Nam, non ſemper unà addendæ, aut ſubducendæ ſunt Ordinatæ ex Ordinatis, & correſpondentes Areæ ex Areis; ſed aliquando harum ſumma, & illarum Differentia ſumi debet ad conſtituendam novam Ordinatam aut Aream correſpondentem. Et hoc fieri debet, quando Areæ poſitæ ſunt ad contrarias Ordinatæ partes. Sed ut cautus Geometra faciliùs vitare poſſit hos ſcopulos, præfixi apta ſigna variis Arearum valoribus, licèt aliquando eæ forent negativæ, ut feci in quinto & ſeptimo Ordine Tabulæ II.

VI.

Præterea, circa Arearum Signa animadvertendum eſt, quòd $+s$ æquè denotat, aut quòd Area Sectionis conicæ pertinens ad Abſciſſam, de quâ agitur, addi debet alteri Quantitati in valore ipſius t; (vide primum ex Exemplis ſequentibus); aut quòd ſubtrahi debet Area poſita ad alteram ab Ordinatâ partem. Et vice verſâ $-s$ ambiguè denotat tum, quòd Area adjacens Abſciſſæ ſubtrahenda eſt, tum, quòd Area ad alteram Ordinatæ partem poſita, addenda eſt, ut conveniens videtur. Pariter valor ipſius t, ſi prodit affirmativus, indicat Aream Curvæ adjacere Abſciſſæ; Et è contra, ſi negativus eſt, eam jacere ad alteram ab Ordinatâ partem.

VII.

Sed, ut hæc Area certiùs definiatur, quærendi tibi ſunt ejus Limites. Hi autem Limites, (quod ſpectat ad Abſciſſam, Ordinatam, & Curvæ Perimetrum,) incerti, aut ambigui nequeunt eſſe; Sed Limes initialis, aut initium unde Curva incipit deſcribi, habere poteſt plures ſitus. In Exemplis ſequentibus, Limes hic eſt aut ad initium Abſciſſæ, aut ab eo diſtat intervallo infinito, aut ad Punctum, in quo Curva concurrit cum Abſciſſâ. At eſſe poteſt ubicunque; &, ubicunque tamen ille ſit, inveniri poteſt quærendo Longitudinem, quâ gaudet Abſciſſâ quando valor ipſius t nihilo æqualis eſt, & inde agendo Ordinatam. Nam, Ordinata ſic ducta erit Limes quæſitus.

VIII.

Si aliqua pars Areæ jacet infra Abſciſſam, t indicat differentiam hujus partis, ab illâ, quæ eſt ſupra Abſciſſam.

IX.

Si quando in valoribus ipſarum x; u; & t; Terminorum Dimenſiones aut nimium aſcendunt, aut nimium deſcendunt, revocari poſ-

possunt ad justum gradum, Terminos aliquâ datâ Quantitate, quæ concipi potest fungi munere Unitatis, toties dividendo, aut multiplicando, quoties opus est ad Exponentes æquandos.

X.

Præter superiores Catalogos aut Tabulas, construi possunt Tabulæ Curvarum relatarum ad alias Curvas, in suo genere, simpliciores; puta ad $\sqrt{a+fx^3}=u$; aut ad $x\sqrt{e+fx^3}=u$; aut ad $\sqrt{e+fx^4}=u$; &c. Ita ut simul derivare liceat Aream Curvæ propositæ ex modulo simpliciori, & noscere ad quas Curvas ea referatur. Sed jam, quæ supra tradidimus, Exemplis illustremus.

Exempl. I.

Sit (*Fig.* 43.) QER Curva Conchoïdalis ejus naturæ, ut descripto Semicirculo QHA, & actâ AC Perpendiculari ad Diametrum AQ, si compleatur Parallelogrammum QACI, & ducatur ejus Diagonalis AI, quæ Semicirculum secat in H, ac demittatur ex H super IC ad rectos Angulos HE, Punctum E tangat hanc Curvam, cujus quæritur Area ACEQ. TAB. VII.

Idcirco fac $AQ=a$; $AC=z$; $CE=y$; &, ob continuè Proportionales IA; AQ; HA; EC, erit EC, aut $y=\frac{a^3}{aa+zz}$.

Nunc, ut hæc Æquatio induat formam illarum, quæ sunt in Tabulis, pone $\eta=2$; & pro z^2 scribe in Denominatore z^η; atque in Numeratore $a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}$ pro a^3, aut a^3z^{1-1}, unde orietur $y=\frac{a^3z^{\frac{1}{2}\eta-1}}{aa+z^\eta}$, Æquatio primæ Speciei secundi Ordinis Tabulæ II, &, per Comparationem Terminorum, habebis $d=a^3$; $e=aa$; & $f=1$; quapropter $\sqrt{\frac{a^3}{aa+zz}}=x$; $\sqrt{a^3-aaxx}=u$; & $ux-2s=t$. Jam, ut inventi valores x, & u, redigantur ad justum Dimensionum numerum, elige aliquam datam Quantita-

 tem;

tem, ut a, per quam, tanquam per Unitatem in valore ipsius x, semel a^3 multiplicetur, in valore autem u, dividantur a^3 quidem semel, sed $aaxx$ bis. Unde obtinebis $\sqrt{\frac{a^4}{aa+zz}} = x$; $\sqrt{aa - xx} = u$; & $ux - 2s = t$: En autem Constructionem.

Centro A, Radio AQ describe Circuli Quadrantem QDP; ex AC abscinde AB = AH, educ Perpendicularem BD Arcui occurrentem in D, & junge AD. Dico, quòd duplex Sector ADP æquat Aream quæsitam ACEQ. Nam, quia $\sqrt{\frac{a^4}{aa+zz}} = (\sqrt{AQ \times EC} = HA =)\ AB = x$; & $\sqrt{aa - xx} = (\sqrt{ADq - ABq} =)$ BD aut u; atque $ux - 2s$ = bis Triang. ADB — 2 ABDQ; aut = bis Triang. ADB + 2 BDP; hæc Area est æqualis sive — 2 QAD, sive + 2 DAP; Quorum valorum affirmativus 2 DAP, pertinet ad Aream ACEQ hinc ab EC; & negativus — 2 QAD ad Aream RCER, quæ in infinitum protenditur ultra EC.

At hæ Problematum Solutiones ita repertæ aliquando majori elegantiâ donari possunt. Ut nunc, ductâ HR Semidiametro Circuli QHA, erit, ob æquales Arcus QH, & DP, Sector QHR semissis Sectoris DAP, & ideo Quadrans Superficiei ACEQ.

Exempl. II.

TAB. VII. Sit (*Fig.* 44.) AGE Curva descripta à Puncto E, quod est ad Verticem Anguli recti AEF, cujus alterum latus AE indefinitum semper transit per datum Punctum A, alterum verò FE datæ Longitudinis labitur super indefinitam Rectam AF positione datam; Demitte EH ad rectos Angulos super AF, & comple Parallelogrammum AHEC; Jam dictis AC = z; CE = y; & EF = a; Quia FH; HE; HA sunt in proportione continuâ, erit HA aut

$$y = \frac{zz}{\sqrt{aa - zz}}.$$

Nunc, ut cognoscamus Aream AGEC, pone $zz = z^{\eta}$; aut $z = \eta$;

$z = \eta$; quapropter erit $\frac{z^{\frac{3}{2}\eta - 1}}{\sqrt{aa - z^{\eta}}} = y$. Cùm autem hìc z habeat in Numeratore fractam Dimenſionem, deprime valorem y, eum dividendo per $z^{\frac{1}{2}\eta}$, & obtinebis $\frac{z^{\eta - 1}}{\sqrt{aaz^{-\eta} - 1}} = y$, Æquationem ſecundæ Speciei ſeptimi Ordinis Tabulæ II. Terminis autem comparatis, invenimus $d = 1$; $e = -1$; & $f = aa$.

Eſt igitur $zz = (\frac{1}{z^{-\eta}} =) xx$; $\sqrt{aa - xx} = u$; & $s - ux = t$. Quapropter, cùm x, & z ſimul æquentur, & cùm $\sqrt{aa - xx} = u$ ſit Æquatio ad Circulum, cujus Semidiameter eſt a, Centro A, Radio EF, aut a, deſcribe Circulum PDQ, quem CE ſecet in D, & compleatur Parallelogrammum ACDI; Tunc erit AC $= z$; CD $= u$; & Area quæſita AGEC $= s - ux$ $=$ ACDP $-$ ACDI $=$ IDP.

EXEMPL. III.

Sit (*Fig.* 45.) AGE Ciſſois pertinens ad Circulum ADQ deſcriptum Diametro AQ. Agatur DCE ad rectos Angulos ſuper Diametrum, & quæ ſecet has Curvas in D, & E. Jamque, vocatis AC $= z$; CE $= y$; & AQ $= a$; Cùm ſint CD; AC; CE continuè proportionales, erit CE, ſive $y = \frac{zz}{\sqrt{az - zz}}$; & (dividendo per z) $y = \frac{z}{\sqrt{az^{-1} - 1}}$. Igitur $z^{-1} = z^{\eta}$, aut $\eta = -1$; & ideo $y = \frac{z^{-2\eta - 1}}{\sqrt{az^{\eta} - 1}}$, quæ Æquatio eſt tertiæ ſpeciei, quarti Ordinis Tabulæ II. Quapropter, per Terminorum Comparationem, eſt $d = 1$; $e = -1$; & $f = a$; Ergo $z = \frac{1}{z^{\eta}} = x$; $\sqrt{ax - xx} = u$; & $3s - 2ux = t$. Quâ de

TAB. VIII.

causâ eſt $AC = x$; $CD = u$; & ideo $ACDH = s$; itaque $3ACDH - 4ADC$ Triang. $= 3s - 2ux = t =$ Areæ Ciſſoidali A C E G A. Aut, (quod idem eſt,) ter Segmentum ADHA æquat Aream ADEGA, ſive quater Segmentum ADHA æquat Aream AHDEGA.

EXEMPL. IV.

TAB. VII. Sit (*Fig.46.*) PE prima Veterum Conchoïs deſcripta Centro G; Aſymptoto AL; & Intervallo LE. Age ejus Axem GAP, & demitte Ordinatam CE. Nunc appella $AC = z$; $CE = y$; $GA = b$; & $AP = c$: Proportionales AC : CE — AL :: GC : CE dabunt CE, ſive $y = \frac{b+z}{z} \times \sqrt{cc - zz}$.

Jam, ut hinc excudi poſſit ejus Area PEC, ſeorſum conſiderari debent partes Ordinatæ CE. Et, ſi Ordinata CE ita dividatur in D, ut ſit $CD = \sqrt{cc - zz}$, & $ED = \frac{b}{z}\sqrt{cc - zz}$, erit CD Ordinata ad Circulum deſcriptum Centro A, & Radio AP. Quapropter Areæ pars CDP cognita eſt, & tantùm invenienda ſupereſt pars DPED. Quia igitur Ordinatæ pars DE, quâ deſcribitur, æquivalet $\frac{b}{z}\sqrt{cc - zz}$, ſuppone $2 = \eta$, & ea fiet $\frac{b}{z}\sqrt{cc - z^{\eta}} = DE$, Æquatio primæ Speciei tertii Ordinis Tabulæ II. Terminos igitur compara, & reperies $d = b$; $e = cc$; & $f = -1$; quapropter $\frac{1}{z} = \sqrt{\frac{1}{z^{\eta}}} = x$; $\sqrt{-1 + ccxx} = u$; & $2bccs - \frac{bu^3}{x} = t$.

His autem inventis, revocandi ſunt ad juſtum Dimenſionum Numerum Termini, multiplicando ſcilicet nimium depreſſos, & dividendo nimium altos per aliquam datam Quantitatem. Hoc ſi fiat per

per c, assequemur $\frac{cc}{z} = x$; $\sqrt{-cc+xx} = u$; & $\frac{2bs}{c} - \frac{bu^3}{cx} = t$. Quæ Æquatio sic potest construi.

Centro A, præcipuo Vertice P, & Latere recto 2 A P describe Hyperbolam P K. Tunc ex Puncto C age rectam C K, quæ tangat Hyperbolam in K: Erítque ut P A ad bis A G, ita Area C K P C ad Aream quæsitam D P E D.

EXEMPL. V.

Gyret (*Fig.* 47.) *Norma* G F E circa Polum G, ita ut angulare Punctum F labatur super Rectâ A F positione datâ, & quodvis aliud Punctum E sumptum in altero Latere E F, concipiatur describere Curvam P E.

TAB. VIII.

Investigaturus Aream hujus Curvæ demitte G A, & E H ad rectos Angulos super Rectam A F, & completo Parallelogrammo AHEC, dic $GA = b$; $AC = z$; $CE = y$; & $EF = c$. Ac, propter Proportionales $FH : HE :: GA : AF$, habebis $AF = \frac{bz}{\sqrt{cc - zz}}$. Igitur C E, aut $y = \frac{bz}{\sqrt{cc - zz}} - \sqrt{cc - zz}$. Sed, quia $\sqrt{cc - zz}$ est Ordinata ad Circulum descriptum Semidiametro c; Centro A describatur Circulus iste P D Q, quem C E producta secet in D; Tunc erit $DE = \frac{bz}{\sqrt{cc - zz}}$. Ope cujus Æquationis reliqua Area P D E P, aut D E R Q determinanda est. Quocirca suppone $\eta = 2$, & $\theta = b$, & erit $DE = \frac{bz^{\eta - 1}}{\sqrt{cc - z^{\eta}}}$, Æquatio primæ Speciei quarti Ordinis Tabulæ I; Nunc, per Comparationem Terminorum, invenies $b = d$; $cc = e$; & $-1 = f$; ita ut $-b\sqrt{cc - zz} = -bR = t$.

Sed, quia negativus est valor ipsius t, & idcirco Area repræsentata per t, jacet ultra Lineam D E; ut inveniatur Limes initialis; quære cujusnam Longitudinis sit z; cum t evanescit, eámque reperies c. Produc igitur A C ad Q donec sit $AQ = c$; & erige Ordina-

dinatam QR; & DQRED erit Area illa, cujus valor nuper inventus exprimitur per $-b\sqrt{cc-zz}$.

Si vis noſcere Quantitatem Areæ PDE poſitæ ad Abſciſſam AC, & cum eâ coextenſæ, ignoto Limite QR, eam potes hoc pacto determinare.

Ex valore, quem habet t, cùm Abſciſſa eſt ipſa AC, ſubduc valorem, quem t habet ad Abſciſſæ initium, id eſt ex $-b\sqrt{cc-zz}$, ſubtrahe $-bc$, & ſic reperies optatam Quantitatem $bc-b\sqrt{cc-zz}$. Quare, comple Parallelogrammum PAGK, & ſuper AP demitte ad rectos Angulos Rectam DM, occurrentem ipſi GK in M, erit Parallelogrammum PKML æquale Areæ PDE.

Si quando Æquatio definiens Curvæ naturam, in Tabulis nequit inveniri, nec ad ſimpliciores Terminos reduci per Diviſionem, aut per alias artes; ea transformanda eſt in alias Æquationes ad Curvas, quæ ad eam referantur, ut oſtendimus in Probl. VIII. donec tandem aliqua proveniat, cujus Area noſci poſſit ex Tabulis. Quòd ſi, licèt omnibus Laboribus exhauſtis, tamen id inveniri non poſſit, pro certo habendum eſt, quòd Curva propoſita comparari nequit, neque cum Figuris Rectilineis, neque cum Sectionibus conicis.

Eodem pacto, quando res eſt de Curvis mechanicis, eæ priùs transformandæ ſunt in æquales Figuras geometricas, ut oſtenſum eſt in eodem Probl. VIII, & deinde harum geometricarum Curvarum Areæ ſunt per Tabulas inveniendæ. Accipe hujus negotii Exemplum.

Exempl. VI.

Determinanda proponatur Area Figuræ Arcuum cujuſcunque Sectionis conicæ, quando ii Arcus ordinatim applicantur ad rectos earum Sinus. *Ex. gr.* Sit (*Fig.* 48.) A Centrum Sectionis conicæ, ejus Semiaxes ſint QA, & AR; CD Ordinata ad Axem AR, & PD Curvæ ad Angulos rectos occurrat in Puncto D.

TAB. VIII.

Præterea ſit AE dicta mechanica Curva, quæ ſecet CD in E; & ex ejus naturâ jam definitâ, erit CE æqualis Arcui QD. Igitur

tur determinari debet, aut Area AEC, aut, completo Parallelogrammo ACEF, excessus AEF. Ad quod obtinendum, sit a Latus rectum Sectionis conicæ, & b, aut 2AQ Latus transversum. Insuper sint AC $= z$; & CD $= y$; & erit $\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz} = y$. Æquatio ad Sectionem conicam, ut omnes norunt. Sed PC $= \frac{b}{a}z$; ergo PD $= \sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}zz}$.

Jam, quia Fluxio Arcûs QD est ad Fluxionem Abscissæ AC, ut PD est ad DC; si Fluxio Abscissæ ponatur æqualis Unitati; erit Fluxio Arcûs QD, aut Ordinatæ CE $= \dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}zz}}{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz}}$.

Hanc duc in FE, aut z, & invenies $z\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}zz}}{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz}}$ esse Fluxionem Areæ AEF. Quapropter, si ex Ordinatâ CD abscindis CG $= z\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}zz}}{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz}}$, Area ACG descripta ab ipsâ CG latâ per AC æquabit Aream AEF, & Curva AG erit geometrica.

Igitur invenienda restat Area AGC. Ut voti compos fias, substitue z^{η} pro z^{2} in ultimâ Æquatione, quæ hoc pacto evadet $z^{\eta-1}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{bb+ab}{aa}z^{\eta}}}{\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}z^{\eta}}} = $ CG, Æquatio secundæ speciei

Ordinis undecimi Tabulæ II. Compara Terminos, eritque $d = 1$; $e = \frac{1}{4}bb = g$; $f = \frac{bb + ab}{aa}$, & $h = \frac{b}{a}$; itaque $\sqrt{\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}zz} = x$; $\sqrt{-\frac{b^3}{4a} + \frac{a+b}{a}xx} = u$; & $\frac{a}{b}s = t$. Videlicet CD $= x$; DP $= u$, & $\frac{a}{b}s = t$. Cujus Constructio sic fieri potest.

Ad Q erige QK perpendicularem, & æqualem ipsi QA, & per Punctum D age HI ei quidem parallelam, sed æqualem ipsi DP. Linea KI, ad quam HI terminatur, erit Sectio conica, & Area comprehensa HIKQ erit ad Aream quæsitam AEF ut b, ad a, aut ut PC ad CA.

Hic animadverte, quod, mutato signo ipsius b, Sectio conica, cujus Arcus æquat Rectam CE, evadit Ellipsis, & si præterea facias $b = -a$, Ellipsis abit in Circulum; & tunc Linea KI fit Recta parallela ipsi AQ.

Postquam Area Curvæ alicujus ita reperta est & constructa, indaganda est Demonstratio Constructionis, ut omisso, quatenus fieri potest, Calculo algebraïco, Theorema fiat concinnum, & elegans, ac publicum lumen sustinere valeat. Est autem generalis demonstrandi Methodus, quam illustrare conabor sequentibus Exemplis.

CONSTRUCTIONIS EXEMPLI V.

DEMONSTRATIO.

TAB. VIII. In (*Fig.* 47.) Arcu PQ, sume Punctum d indefinitè propinquum Puncto D, & age de, ac dm parallelas ipsis DE, ac DM, & secantes DM, & AP in p, ac l. Erit DEed Momentum Areæ PDEP, & LMml Momentum Areæ LMKP. Age Semidiametrum AD, & concipe Arcum indefinitè exiguum Dd esse Lineam rectam, ac Triangula Dpd, & ALD similia erunt, & ideo Dp: pd :: AL : LD. Sed est FH : HE :: GA : AF; id est AL : LD :: ML : DE; ergo Dp : pd :: ML : DE. Quapropter pD×DE $= pd$×ML; id est Momentum DEed æquale est Momento LMml. Cùm autem hoc demonstratum indeterminatè sit de omnibus

nibus ſimul genitis Momentis quibuſcunque, patet quòd omnia Momenta Areæ PDEP æqualia ſunt omnibus unà ſubſurgentibus Momentis Areæ PLMK, & idcirco, quòd Areæ ipſæ compoſitæ ex his Momentis æquales ſunt. Q. E. D.

CONSTRUCTIONIS EXEMPLI III.

DEMONSTRATIO.

Sit (*Fig.* 45.) DE*ed* Momentum ſuperficiei AHDE, & A*d* DA eodem tempore genitum Momentum Segmenti ADH. Age Semidiametrum DK, & D*e* ſecet AK in *c*; erítque C*c* ad D*d* ut CD ad DK. Præterea, eſt DC : QA (2DK) :: AC : DE; ergo C*c* : 2D*d* :: CD : 2DK :: AC : DE, & $Cc \times DE = 2Dd \times AC$. Nunc ad D*d* Momentum Peripheriæ, productum, id eſt ad Tangentem Circuli, demitte ad rectos Angulos AI; & IA æquabit AC. Itaque $2Dd \times AC = 2Dd \times AI =$ quater Triang. A*d*D. Quocirca quater Triang. $AdD = Cc \times DE =$ Momento DE*ed*. Igitur quodlibet Momentum Spatii AHDE quadruplex eſt eodem tempore geniti Momenti Segmenti ADH, quamobrem totum illud Spatium quadruplex eſt totius Segmenti. Q. E. D.

TAB. VII.

CONSTRUCTIONIS EXEMPLI IV.

DEMONSTRATIO.

Age (*Fig.* 46.) *ce* parallelam ipſi CE, & indefinitè parum ab eâ diſſitam; duc pariter *ck* Tangentem Hyperbolæ; & demitte KM perpendicularem ad AP. Jam, ex Hyperbolæ naturâ eſt CA : AP :: PA : AM, & idcirco AG*q* : GL*q* :: CA*q* : LE*q* (aut AP*q*) :: AP*q* : AM*q*, & *diviſim* AG*q* : AL*q* (DE*q*) :: AP*q*. AM*q* — AP*q* (MK*q*). Et *inverſè* GA : AP :: DE : MK. Sed Areola DE*ed* eſt ad Triangulum CK*c*, ut Altitudo DE ad ad dimidiam Altitudinem KM; id eſt, ut AG ad $\frac{1}{2}$ AP. Ergo omnia Momenta Spatii PDE ſunt ad omnia ſimul orta Momenta

TAB. VII.

Spatii PKC, ut AG ad $\frac{1}{2}$ AP, quapropter tota Spatia erunt in eâdem ratione. Q. E. D.

CONSTRUCTIONIS EXEMPLI VI.

DEMONSTRATIO.

TAB. VIII. Duc *dc* Parallelam, & infinitè proximam ipsi DC (*Fig.* 48.,) & Curvæ AE occurentem in *e*; atque age *hi* & *fe*, quæ secent DC in *p*, atque *q*. Erit per Hypothesim, $dD = Eq$; & quia similia sunt Triangula Ddp, & DCP, habebis $pD : (Dd)\ Eq :: CP : (PD)\ HI$; itaque $Dp \times HI = Eq \times CP$; & propterea $DP \times HI$ (Momentum scilicet ipsius $HIih$) : $Eq \times AC$ (Momentum ipsius $EFfe$) $:: Eq \times CP : Eq \times AC :: PC : CA$. Et, quia PC, & CA sunt in datâ ratione, in eâ nempè quam Latus transversum habet ad rectum conicæ Sectionis DQ, ideò Momenta $HIih$, & $EFfe$ Arearum HIKQ, & AEF sunt in eâdem ratione, ergo in hâc quoque sunt Areæ ipsæ. *Q. E. D.*

In hoc Demonstrationum genere, animadvertendum est, quòd pro æqualibus habeo Quantitates, quarum ratio est æqualitatis. Ea autem existimanda est ratio æqualitatis, quæ ab æqualitate differt ratione inæquali minori, quàm quælibet assignabilis. Sic, in ultimâ Demonstratione suppofui rectangulum $Eq \times AC$, aut $FEqf$ æquale Spatio $FEef$, quia (cùm differentia Eqe sit iis infinitè minor, aut nihilo æqualis relata ad illa Spatia) nulla est inter illa inæqualitatis ratio. Eâdem ratione assumpsi $DP \times HI = HIih$; & sic de ceteris.

Methodum demonstrandi, quòd Curvarum Areæ sunt æquales, aut in datâ ratione, ex eo quòd earum Momenta sunt æqualia, aut in datâ ratione, usurpavi, quia affinitatem quandam habet cum Methodis, quæ passim in his negotiis adhibentur.

Magis tamen genuina, & rerum naturæ consona videtur ea, quæ profluit ex Superficierum genesi per motum, aut Fluxiones. Ex quo fonte sic, *Ex. gr.* deduci posset Demonstratio Constructionis

TAB. VII. Exempli II. Ex naturâ Circuli *Fig.* 44.) Fluxio Rectæ DI est ad Fluxio-

Fluxionem Rectæ IP, ut AI ad ID, & est AI: ID :: DI: CE ex Curvæ AGE naturâ; ergo $CE \times \dot{ID} = DI \times \dot{IP}$. Sed $CE \times \dot{ID}$ æquat Fluxionem Areæ ACEG, & $DI \times \dot{IP}$ æquat Fluxionem Areæ PDI; Ergo Areæ istæ genitæ Fluxionibus æqualibus debent esse æquales. *Q. E. D.*

Ut major lux his affundatur, addam Demonstrationem Constructionis, quâ determinavimus Aream Cissoïdis in Exemplo III. Deletæ concipiantur in Schemate (*Fig*.45.) Lineæ solis Punctis indicatæ. Age Chordam DQ, & Rectam QR, quæ est Cissoïdis Asymptotus. Nunc, ex Circuli naturâ, est $DQq = AQ \times QC$. Ergo (per Probl. I.) $2DQ \times \dot{QD} = AQ \times \dot{QC}$. Quapropter $AQ : QD :: 2\dot{DQ} : \dot{QC}$. Rursum, ex Cissoïdis naturâ, est ED: DA :: AQ: QD; ergo $ED : DA :: 2\dot{DQ} : \dot{QC}$, ac $ED \times \dot{QC} = AD \times 2\dot{DQ} = 4 \times \frac{1}{2} AD \times \dot{DQ}$. Jam, quia DQ perpendicularis est ad extremitatem ipsius DA gyrantis circa A; & $\frac{1}{2} AD \times \dot{QD}$ æquat Fluxionem, quæ gignit Aream ADOQ, atque ejus Quadruplex $ED \times \dot{CQ}$ æqualis est Fluxioni generanti Aream cissoïdalem QREDO; Igitur hæc Area QREDO in infinitum protensa gignitur Quadruplex alterius ADOQ. *Q. E. D.*

TAB. VII.

SCHOLIUM.

Ope Superiorum Tabularum, non solùm Curvarum Areæ, sed etiam Quantitates alterius generis, quæ gignuntur analogâ fluendi ratione, deduci possunt ex earum Fluxionibus, & id per hoc Theorema; nempe, Quantitas cujuscunque generis, est ad Unitatem ejusdem generis, ut Area cujusvis Curvæ est ad Unitatem superficialem, dummodo Fluxio generans hanc Quantitatem sit ad Unitatem sui generis, ut Fluxio generans Aream est ad Unitatem pariter sui generis; id est, ut Recta perpendiculariter lata per Abscissam, (sive

 Ordinata,)

Ordinata,) quâ Area defcribitur eft ad Unitatem linearem. Quapropter, fi quælibet Fluxio exponatur per hanc mobilem Ordinatam, Quantitas genita hac Fluxione exponetur per Aream ab hac Ordinatâ defcriptam, aut, fi Fluxio exponatur per eofdem algebraïcos Terminos, qui exponunt Ordinatam, genita Quantitas per eos exponetur, qui exponunt Aream defcriptam. Igitur quærenda eft in primâ Tabularum Columnâ Æquatio, quæ exhibet Fluxionem cujufvis generis, & valor ipfius t, qui eft in ultimâ Columnâ exprimet Quantitatem genitam.

Exhibeat, *Ex. gr.* $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ Fluxionem alicujus generis, eam fac æqualem y, & ut revocetur ad Formam Æquationum, quæ funt in Tabulis, fcribe z^η pro z, & prodibit $z^{\eta-1}\sqrt{1+\frac{9}{4a}z^\eta}=y$, Æquatio primæ Speciei tertii Ordinis Tabulæ I. Comparatis verò Terminis, conficietur $d=1$; $e=1$; $f=\frac{9}{4a}$; & propterea $\frac{8a+18z}{27}\times\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}=\frac{2d}{3\eta f}R^3=t$. Ergo Quantitas $\frac{8a+18z}{27}\times\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$ ea eft, quæ generatur Fluxione $\sqrt{1+\frac{9z}{4a}}$.

Eodem pacto fi $\sqrt{1+\frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ exprimit Fluxionem aliquam, legitimè reducendo hanc Æquationem, (aut ponendo $z^{\frac{2}{3}}$ extra fignum, & fcribendo z^η pro $z^{-\frac{2}{3}}$,) habebitur $\frac{1}{z^{\eta+1}}\sqrt{z^\eta+\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}}=y$, Æquatio fecundæ Speciei quinti Ordinis Tabulæ II.

Collatio Terminorum dat $d=1$; $e=\frac{16}{9a^{\frac{2}{3}}}$; & $f=1$. Eft igitur $z^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{z^\eta}=xx$; $\sqrt{1+\frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}}=u$; & $\frac{3}{2}s=\frac{-2d}{\eta}s=t$. Quibus inventis, cognita erit Quantitas genita Fluxione $\sqrt{1+}$

$\sqrt{1 + \frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$, eam faciendo ad Unitatem sui generis, ut Area $\frac{3}{2}s$ est ad Unitatem superficialem, aut, (quod in idem recidit,) supponendo t non amplius indicare Superficiem, sed Quantitatem alterius generis, quæ est ad Unitatem sui generis, ut hæc Superficies ad Unitatem Superficierum.

Sic, si supponas, quod $\sqrt{1 + \frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}}$ exponit Fluxionem linearem, intellige t non amplius exprimere Superficiem, sed Lineam, quæ *ex. gr.* sit ad Unitatem linearem, ut Area, quæ (secundùm Tabulas) exponitur per t, est ad superficialem Unitatem, aut quæ invenitur applicando hanc Aream Unitati lineari. Tunc, si hæc Unitas linearis ponatur $= e$; Longitudo genita à præcedente Fluxione erit $= \frac{3s}{2e}$. Atque his Fundamentis possunt hæ Tabulæ utiles esse ad determinandam Curvarum Longitudinem, Soliditatem Solidorum ab iis genitorum, & quascunque alias Quantitates, æquè bene ac Areas Curvarum.

De Quæstionibus, quæ ad has referuntur.

I.

Mechanicè invenire per approximationem Areas Curvarum.

Tota Methodus in eo versatur, ut valores duarum, aut plurium Figurarum rectilinearum jungantur, ita ut quamproximè constituant quæsitum Areæ curvilineæ valorem.

Sic (*Fig.* 49.) in Circulo A F D, qui exprimitur Æquatione $x - xx = zz$, invento valore Areæ A F D B, videlicet $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}}$, &c. inveniendi sunt valores plurium TAB. VIII.

Rectan-

Rectangulorum, qualia sunt $x\sqrt{x - xx}$, aut $x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{9}{2}}$; &c., valor ipsius DB×BA; & $x\sqrt{x}$ aut $x^{\frac{3}{2}}$, valor ipsius DA×AB. Deinde hi valores multiplicandi sunt per aliquas diversas litteras, quæ gerunt vicem Numerorum indefinitè, & simul addendi, hujúsque summæ Termini comparandi sunt correspondentibus Terminis valoris Areæ AFDB, ut ad æqualitatem accedant, quantùm fieri potest. Multiplicentur *Ex. gr.* hæc Parallelogramma per e & f; erit eorum summa $\begin{matrix}+e\\+f\end{matrix}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}ex^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}ex^{\frac{7}{2}}$; &c., qui Termini comparati cum his $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}}$; &c., suppeditant $e + f = \frac{2}{3}$; & $-\frac{1}{2}e = -\frac{1}{5}$; aut $e = \frac{2}{5}$, & $f = \frac{2}{3} - e = \frac{4}{15}$. Quapropter $\frac{2}{5}$DB×BA $+ \frac{4}{15}$ DA×AB = Areæ AFDB, quàm proximè. Nam $\frac{2}{5}$ DB ×BA $+ \frac{4}{15}$DA×AB $= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}} - \frac{1}{40}x^{\frac{9}{2}}$; &c., quo valore subducto ex Areâ AFDB restat solùm error $\frac{1}{20}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{90}x^{\frac{9}{2}}$; &c.

TAB. VIII. Pariter (*Fig.* 49.), Si AB bifariam secta esset in E, valor Rectanguli AB × DE esset $x\sqrt{x - \frac{3}{4}xx}$, aut $x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{9}{128}x^{\frac{7}{2}} - \frac{27}{1024}x^{\frac{9}{2}}$; &c., quod collatum cum Rectangulo DA × AB præbet $\frac{8DE + 2AD}{15}$ in AB = Areæ AFDB, & error est solùm $\frac{1}{560}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{5760}x^{\frac{9}{2}}$; &c., qui semper minor est, quàm $\frac{1}{1500}$ pars totius Areæ, etiam quando AFDB est Circuli Quadrans. Sed hoc Theorema potest ita proponi. Ut 3 est ad 2, ita

ita Rectangulum ex A B in D E unà cum quintâ parte Differentiæ, quæ eſt inter A D, & D E ad Aream A F D B quàmproximè.

Et ſic in unum conjiciendo duo Rectangula $AB \times ED$, & $AB \times BD$, aut tria Rectangula, aut ſumendo ſemper plura Rectangula, confici poſſunt aliæ Regulæ, quæ eò accuratiores erunt, quò plura Rectangula adhibebuntur. Idem intelligendum eſt de Areâ Hyperbolæ, & quarumlibet aliarum Curvarum. Quinimo ſæpè uno Rectangulo poteſt Area commodè exhiberi, ut in Circulo, de quo ſupra, ſumendo E B ad B A, ut $\sqrt{10}$ ad 5, erit Rectangulum $AB \times ED$ ad Aream A F D B, ut 3 ad 2, & error ſolùm erit $\frac{1}{175} x^{\frac{7}{2}} + \frac{11}{2250} x^{\frac{9}{2}}$; &c.

I I.

Areâ datâ determinare Abſciſſam, & Ordinatam.

Nulla eſt difficultas, quando Area exprimitur Æquatione finitâ: Sed quando ea exponitur per infinitam Seriem, extrahi debet Radix affecta, quæ denotat Abſciſſam. Sic pro Hyperbolâ, quam definit Æquatio $\frac{ab}{a+x} = z$, poſtquam inveneris $z = bx - \frac{bxx}{2a} + \frac{bx^3}{3aa} - \frac{bx^4}{4a^3}$; &c., ſi ex datâ Areâ vis invenire Abſciſſam x, extrahe Radicem affectam, & habebis $x = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{96a^4b^5}$; &c., & præterea ſi noſcere cupis Ordinatam $\dot{z}$, divide ab per $a+x$, id eſt per $a + \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4}$; &c., unde fiet $\dot{z} = b - \frac{z}{a} - \frac{zz}{2aab} - \frac{z^3}{6a^3bb} - \frac{z^4}{24a^4b^3}$; &c.

Eodem pacto in Ellipſi, quæ determinatur Æquatione $ax - \frac{a}{c} \times$

 $xx =$

$xx = \dot{z}\dot{z}$, postquam inventa fuerit Area $z = \frac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}}{5c} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{7}{2}}}{28cc} - \frac{a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{9}{2}}}{72c^{3}}$; &c., scribe u^{3} pro $\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}$, & t pro $x^{\frac{1}{2}}$, ea fit $u^{3} = t^{3} - \frac{3t^{5}}{10c} - \frac{3t^{7}}{56cc} - \frac{t^{9}}{48c^{3}}$; &c., &, extractâ Radice, $t = u + \frac{u^{3}}{10c} + \frac{81u^{5}}{1400cc} + \frac{1171u^{7}}{252000c^{3}}$; &c., cujus Quadratum $uu + \frac{u^{4}}{5c} + \frac{22u^{6}}{175cc} + \frac{823u^{8}}{7875c^{3}}$; &c., æquale est x; & hoc valore posito pro x, in Æquatione $ax - \frac{a}{c}xx = \dot{z}\dot{z}$, & extractâ Radice, conficitur $\dot{z} = a^{\frac{1}{2}}u - \frac{2a^{\frac{1}{2}}u^{3}}{5c} - \frac{38a^{\frac{1}{2}}u^{5}}{175cc} - \frac{407a^{\frac{1}{2}}u^{7}}{2250c^{3}}$; &c., Ita ut ex datâ Areâ z, & ideo u, aut $\sqrt[3]{\frac{3z}{2a^{\frac{1}{2}}}}$, datur Abscissa x, & Ordinata $\dot{z}$. Hæc omnia possunt aptari Hyperbolæ, mutatis tantùm signis Quantitatis c in eis Terminis, in quibus ea ascendit ad impares Dimensiones.

PROBL. X.

Invenire quotlibet Curvas, quarum Longitudo, finitâ Æquatione possit exprimi.

Sequentes positiones viam aperiunt ad hujus Problematis Solutionem.

I.

TAB. VIII. Si (*Fig.* 50.) recta Linea DC concipiatur ita moveri, ut semper Perpendicularis sit Curvæ AD, omnia ejus Puncta G; r; g; &c., describent alias Curvas, ut GK; rs; gk; &c., quæ æquidistantes erunt & Perpendiculares illi Rectæ.

II. Si

I I.

Si hæc Recta utrinque in infinitum producatur, ejus extrema ad contrarias partes movebuntur; idcirco erit aliquod Punctum intermedium, omnis motûs expers, quod propterea vocari poterit Centrum motûs. Hoc Punctum erit Centrum ipsum Curvaturæ, quâ Curva A D gaudet ad Punctum D, & de quo supra locuti sumus. Sit illud C.

I I I.

Si supponis, quòd Linea A D non est Circularis, sed inæquabiliter curvata, sit ea magis curvata δ versùs, quàm versùs Δ. Centrum illud assiduè locum mutabit, & propiùs accedet ad partes magis curvas, ut in K; ac recedet à partibus minùs Curvis, ut in *k*, & hoc pacto describet aliquam Lineam ut K C *k*.

I V.

Recta Linea D C semper tanget Lineam à Curvaturæ Centro descriptam. Moveatur enim versùs δ Punctum D in hac Rectâ sumptum, alterum ejus Punctum G positum inter C, & D Puncta, eodem tempore accedit ad Punctum K, & movetur ad easdem partes, ac Punctum D per Posit. I I. Rursus, idem Punctum D moveatur versùs Δ; tunc Punctum *g*, quod eodem tempore fertur versùs K, & situm est ultra Punctum C, movetur ad contrarias partes, ac Punctum D, id est, ad easdem, ad quas ferebatur Punctum G in priori suppositione, dum accedebat ad K. Igitur Puncta K, & *k* jacent ad easdem partes Lineæ D C; sed Puncta K & *k* indefinitè exprimunt omnia Puncta; ergo patet, quòd tota Curva jacet ad eandem partem Lineæ rectæ D C, & ideo ab eâ non secatur, sed solùm tangitur.

Hìc supposuimus Lineam δ D Δ esse semper magis curvatam versùs δ, & minùs versùs Δ; Nam, si ejus major, aut minor Curvatura esset in D, tunc recta Linea D C secaret Curvam C K, sub

Angulo tamen, qui minor eſſet quocunque Angulo rectilineo, quod idem eſt ac ſi diceres, eam tangeret. Quinimo tunc Punctum C eſt Limes, aut Cuſpis, in quo duæ partes hujus Curvæ, quàm maximè poteſt, obliquè concurrentes, mutuò ſe ſe tangunt; & ideo meliùs dici poteſt hanc Curvam tangi, quàm ſecari à Rectâ D C, quæ dividit angulum Contactûs.

V.

Recta Linea CG æquat Curvam CK. Nam, intellige omnia Rectæ Puncta r; $2r$; $3r$; $4r$; &c. deſcribere Arcus Curvarum rs; $2r2s$; $3r3s$; $4r4s$; &c; dum accedunt ad Curvam CK motu Rectæ; & quia Arcus iſti (per Poſitionem I.) Perpendiculares ſunt Rectis, quæ tangunt Curvam CK (per Poſit. IV.) ideo Perpendiculares ſunt etiam ad hanc Curvam. Quapropter eæ partes Lineæ CK. quæ interceptæ ſunt his Arcubus, & quæ, ob infinitam earum exiguitatem, haberi poſſunt tanquam Rectæ, æquales ſunt intervallis eorumdem Arcuum; videlicet (per Poſit. I.) ſingulis partibus Rectæ CG; Et, æqualibus æqualia addendo, tota Linea CK æqualis eſt toti Lineæ CG.

Idem conficies conſiderando, quòd quævis pas Lineæ CG, dum movetur, ſemet ſucceſſivè applicat cuilibet parti Curvæ CK, & ideo eam metitur, ad amuſſim ut Peripheria rotæ, dum gyrando movetur ſuper Planum, metitur intervallum, quod jugiter deſcribitur à Puncto Contactûs.

Hinc liquet quòd Problema ſolvi poteſt, aſſumendo ad libitum aliquam Curvam A δ D Δ, & hinc determinando aliam Curvam KCk, in quâ ſemper ſit Centrum Curvaturæ Curvæ aſſumptæ. Igitur (*Fig.* 51.) demitte Perpendiculares DB, & CL, ſuper Rectâ AB poſitione datâ, & in AB ſume aliquod Punctum A, & dic $AB = x$; Et $BD = y$; & aſſume relationem quamcunque inter x, & y ad determinandam Curvam AD; deinde, per Probl. V, inveni Punctum C, per quod determinare poteris Curvam KC, & ejus Longitudinem CG.

TAB. VIII.

Exem-

EXEMPLUM.

Sit (*Fig.* 51.) $ax = yy$ Æquatio ad Curvam, quæ ideo erit Parabola *Apolloniana*. Et, per Probl. V. reperies $AL = \frac{1}{2}a + 3x$; $CL = \frac{4y^3}{aa}$; & $DC = \overline{\frac{a+4x}{a}} \times \sqrt{\frac{1}{4}aa + ax}$. Quibus inventis Curva KC determinatur per AL, & LC; ac Longitudo ejus per DC. Nam, quia, pro arbitrio sumpsimus Puncta K, & C ubi libuit in Curvâ KC, supponamus K esse Centrum Curvaturæ Parabolæ ad ejus Verticem; quocirca, ponendo AB, & BD, id est, x, & y, evanescere, assequemur $DC = \frac{1}{2}a$. Et hæc est Longitudo ipsius AK, vel DG, quâ subductâ ex indefinito valore DC, superest GC, aut $CK = \overline{\frac{a+4x}{a}} \times \sqrt{\frac{1}{4}aa + ax} - \frac{1}{2}a$.

TAB. VIII.

Nunc, si cognoscere vis quænam Curva sit hæc, & quanta ejus Longitudo absque relatione ad Parabolam; dic $KL = z$, & $LC = u$; & erit $z = AL - \frac{1}{2}a = 3x$, vel $\frac{1}{3}z = x$; ac $\frac{az}{3} = ax = yy$. Quapropter $4\sqrt{\frac{z^3}{27a}} = \frac{4y^3}{aa} = CL = u$, aut $\frac{16z^3}{27a} = uu$; quæ Æquatio ostendit Curvam KC esse Parabolam secundi generis. Ejus Longitudo autem reperitur $\overline{\frac{3a+4z}{3a}} \times \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{3}az} - \frac{1}{2}a$, scribendo scilicet $\frac{1}{3}z$ pro x in valore ipsius CG.

Problema resolvi etiam potest sumendo Æquationem, quæ exprimat relationem quæ est inter AP, & PD, supposito P Puncto, quo Abscissa, & Perpendicularis se intersecant. Nam, vocatis $AP = x$, & $PD = y$; concipe CDP moveri per Spatium infinitè parvum, & venire, puta, in Cpd. Abscinde ex CD, & Cd, partes $C\Delta$, & $C\delta$, ambas ejusdem datæ Longitudinis, *Ex. gr.* $= 1$; & ad CL demitte Perpendiculares Δg; & $\delta\gamma$, quarum altera Δg, (quam dico $= z$,) secat Cd in f. Jam, completo Parallelo-

 grammo

grammo $g\gamma\delta e$, & ponendo esse $\dot{x}$; $\dot{y}$; & $\dot{z}$ Fluxiones Quantitatum x; y; & z, ut priùs, erit $e\Delta : \Delta f :: \overline{e\Delta}|^2 : \overline{\Delta\delta}|^2 : \overline{gC}|^2 : \overline{C\Delta}|^2 :: \frac{\overline{Cg}|^2}{C\Delta} : \Delta C$. Et $\Delta f : Pp :: \Delta C : CP$. Ergo, *ex æquo*, $\Delta e : Pp :: \frac{\overline{Cg}|^2}{C\Delta} : CP$. Sed Pp est Momentum Abscissæ, quo accedente ea fit Ap; & Δe est eodem tempore genitum Momentum Perpendicularis Δg, quo recedente ea fit $\delta\gamma$: Quocirca Δe; & Pp sunt ut Fluxiones Linearum Δg (z), & AP (x), id est, ut $\dot{z}$ & $\dot{x}$. Quamobrem $\dot{z} : \dot{x} :: \frac{\overline{Cg}|^2}{C\Delta} : CP$. Sed, quia est $\overline{Cg}|^2 = \overline{C\Delta}|^2 - \overline{\Delta g}|^2 = 1 - zz$, & $C\Delta = 1$, erit $CP = \frac{\dot{x} - zz\dot{x}}{\dot{z}}$. Præterea, quia licet assumere aliquam ex tribus Fluxionibus $\dot{x}$; $\dot{y}$; & $\dot{z}$, pro uniformi illâ, ad quam aliæ referuntur; sit $\dot{x}$ Fluxio hæc, quæ Unitati æquivalet; erit igitur $CP = \frac{1 - zz}{\dot{z}}$.

Insuper est $C\Delta$ (1) : Δg (z) :: $CP : PL$; & ΔC (1) : Cg ($\sqrt{1 - zz}$) :: $PC : CL$; quapropter $PL = \frac{z - z^3}{\dot{z}}$, & $CL = \frac{1 - zz}{\dot{z}} \times \sqrt{1 - zz}$. Denique, ductâ pq parallela Arcui infinitè exiguo Dd, aut perpendiculari ad DC, erit Pq Momentum ipsius DP, quo scilicet accedente ea fit dp eodem tempore, quo AP evadit Ap. Quocirca pP, & Pq sunt ut Fluxiones ipsarum AP (x), & PD (y), id est, ut 1 ad $\dot{y}$. Igitur quia ob similia Triangula Ppq, & $C\Delta g$, sunt $C\Delta$, & Δg, vel 1, & z, in eâdem ratione, erit $\dot{y} = z$, Unde habes Problematis solutionem hanc.

Ex propositâ Æquatione, quæ exprimit relationem inter x; & y; investiga relationem Fluxionum, $\dot{x}$, & $\dot{y}$ (per Probl. I.), & ponendo

nendo $\dot{x} = 1$ obtinebis valorem $\dot{y}$, cui æqualis eſt z. Deinde ſcribendo z pro y, ope ultimæ Æquationis require relationem Fluxionum $\ddot{x}$; $\ddot{y}$; & $\dot{z}$ (per Probl. I.), & rurſus ſubſtitue 1 pro $\dot{x}$, hinc aſſequeris valorem $\dot{z}$. Quibus inventis fac $\frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = CP$; $z \times CP = PL$; & $CP \times \sqrt{1 - \dot{y}\dot{y}} = CL$; & C erit Punctum in Curvâ, cujus pars quæcunque CK æqualis eſt rectæ Lineæ CG, quæ eſt differentia Tangentium ad Angulos rectos inſiſtentium Curvæ Dd, & actarum ex Punctis C, & K.

EXEMPLUM.

Sit $ax = yy$ Æquatio exponens relationem ipſarum AP, & PD; eritque (per Probl. I.) primò $a\dot{x} = 2y\dot{y}$, aut $a = 2yz$. Deinde $2\dot{y}z + 2z\ddot{y} = 0$, aut $\frac{-zz}{y} = \dot{z}$. Unde conficitur $CP = \frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = y - \frac{4y^3}{aa}$; $PL = z \times CP = \frac{1}{2}a - \frac{2yy}{a}$, & $CL = \frac{aa - 4yy}{2aa} \times \sqrt{4yy - aa}$. Et, ſubtrahendo ex CP & PL y & x, remanet $CD = -\frac{4y^3}{aa}$; & $AL = \frac{1}{2}a - \frac{3yy}{a}$. ſubtraho autem y, & x, quia, quando CP & PL habent valores affirmativos, cadunt ultra Punctum P verſus D & A, & minui debent ſublatis Quantitatibus affirmativis DP, & PA; Quando verò valores habent negativos, cadunt ad contrarias partes Puncti P, & augeri debent, quod pariter fit ablatis affirmativis Quantitatibus DP & PA.

Nunc excudenda eſt Longitudo Curvæ, in quâ eſt Punctum C, comprehenſa inter duo ejus Puncta K & C; ad quod obtinendum quærenda eſt Longitudo Tangentis ad Punctum K, & ſubducenda ex CD. *Ex. gr.*, ſi K eſſet Punctum, ubi Tangens terminatur, cùm $C\Delta$ & Δg, aut 1 & z invicem æquantur, quod ideo erit in ipſâ Abſciſſâ AP; ſcribe 1 pro z in Æquatione $a = 2yz$, unde reperies

ries $a = 2y$, vel $\frac{1}{2}a = y$. Quapropter pro y ſcribe $\frac{1}{2}a$ in valore ipſius CD, id eſt, in $-\frac{4y^3}{aa}$; & provenit $-\frac{1}{2}a$. Et hæc eſt Longitudo Tangentis ad Punctum K, aut ipſius DG; Quantitas autem, quâ ſuperior indefinitus valor CD ab hac differt, eſt $\frac{4y^3}{aa} - \frac{1}{2}a$, nempe GC, cui æqualis eſt Curvæ pars KC.

Jam, hoc pacto deteges quænam Curva ea ſit; Ex AL, (mutato priùs ejus ſigno, quò fiat affirmativa;) aufer AK, quæ erit $\frac{1}{4}a$, & reſtabit KL $= \frac{3yy}{a} - \frac{3}{4}a$; hanc dic $= t$, & in valore Lineæ CL, quam appello u, ſcribe $\frac{4at}{3}$ pro $4yy - aa$; hinc orietur $\frac{2t}{3a}\sqrt{\frac{4}{3}at} = u$, aut $\frac{16t^3}{27a} = uu$, quæ Æquatio pertinet ad Parabolam ſecundi generis, ut jam inveneramus.

Si quando relatio ipſarum t, & u concinnè Æquatione concludi nequit, ſufficiet inveniſſe Longitudines CP, & PL. Ut, ſi ad exponendam relationem inter AP, & PD aſſumeretur Æquatio $3aax + 3aay - y^3 = 0$. Hinc (per Probl. I.) habetur primò $aa + aaz - yyz = 0$; Deinde $aa\dot{z} - 2zy\dot{y} - yy\dot{z} = 0$, & propterea $z = \frac{aa}{yy - aa}$, & $\dot{z} = \frac{2zy\dot{y}}{aa - yy}$. Undè dantur PC $= \frac{1 - yy}{\dot{z}}$, & PL $= z \times$ PC, quibus determinatur Punctum C, quod Curvam tangit; & Longitudo Curvæ duobus Punctis intercepta innoteſcit ex differentiâ duarum correſpondentium Tangentium DC, aut CP $- y$.

Ex. gr. ſi ponas $a = 1$, & ſumas (ad determinandum aliquod Punctum C in Curvâ) $y = 2$; P, aut x evadit $\frac{y^3 - 3aay}{3aa} = \frac{2}{3}$; $z = \frac{1}{3}$; $\dot{z} = -\frac{4}{9}$; PC $= -2$; & PL $= -\frac{2}{3}$. Jam, ſi aliud Punctum determinaturus, facias $y = 3$; erit AP $= 6$; z

$=$

$= \frac{1}{8}$; $\dot{z} = -\frac{3}{256}$; PC $= -84$, & PL $= -10\frac{1}{2}$. Quibus datis, aufer y ex PC, & supererit -4 in primâ Hypothesi, & -87 in secundâ, quæ erunt duæ Longitudines duarum DC; harum verò differentia 83 est Longitudo Curvæ inter duo Puncta reperta C, & c.

Hæc intelligenda sunt de Curvis, quæ inter duo Puncta C, & c, aut C, & K nullum habent ex illis Terminis, aut Limitibus, quos vocavimus Cuspides. Nam, quando unus aut plures ex Terminis istis, sunt inter hæc Puncta, (qui Termini reperiuntur determinatis maximis aut minimis PC, vel CD,) seorsum quærendæ sunt Longitudines singularum partium Curvæ, quæ sunt inter Terminos istos, & Puncta C, vel K, & deinde hæ Longitudines invicem addendæ.

PROBL. XI.

Invenire quotlibet Curvas, quarum Longitudines comparari possint cum aliquâ Curvâ propositâ, aut cum suis Areis applicatis datæ Lineæ, & id per finitam Æquationem.

Problema solvitur involvendo Longitudinem, aut Aream Curvæ propositæ in Æquatione, quam assumpsimus in Problemate superiore, ad definiendam relationem, quæ est inter AP, & PD. Sed, ut $\dot{x}$, & $\dot{z}$ hinc (per Probl. I.) eruere liceat, priùs detegenda est Fluxio Longitudinis, aut Areæ.

Fluxio autem Longitudinis invenitur eam ponendo æqualem Radici quadratæ, extractæ ex Aggregato Quadratorum ex Fluxionibus Abscissæ, & Ordinatæ. Nam, sit (*Fig.* 52.) RN Ordinata ad rectos Angulos super Abscissam MN, & ea moveatur super MN; sit autem QR Curva proposita, ad quam terminatur RN. Jam, dic MN $= s$; NR $= t$; & RQ $= u$; ac Fluxiones earum $\dot{s}$; $\dot{t}$, & $\dot{u}$ respectivè. Intellige Rectam NR venire in locum nr priori infinitè propinquum, & demitte Rs ad rectos Angulos super nr; Tunc erunt Rs; sr; & rR simul exorientia Momenta Linearum MN; NR; & RQ, quibus accedentibus illæ evadunt Mn; nr; & rQ. TAB. IX.

 Hæc

Hæc autem Momenta eandem inter ſe rationem habent, ac earumdem Linearum Fluxiones; & quia rectus eſt Angulus Rsr, erit $\sqrt{\overline{Rs}|^2 + \overline{sr}|^2} = Rr$; aut $\sqrt{\dot{s}\dot{s} + \dot{t}\dot{t}} = \dot{u}$.

Sed duabus Æquationibus opus eſt ad determinandas Fluxiones $\dot{s}$, & $\dot{t}$, quarum una definire debet Relationem, quæ eſt inter MN, & NR, aut inter s, ac t, & ex quâ deducenda eſt Relatio Fluxionum $\dot{s}$, & $\dot{t}$; altera verò determinare debet Relationem, exiſtentem inter MN, aut NR in datâ Figurâ, ac PA, aut x in quæſitâ; unde deducere liceat Relationem, quam Fluxio $\dot{s}$, aut $\dot{t}$ habet ad Fluxionem $\dot{x}$, aut 1.

Detectâ verò $\dot{u}$, Fluxiones $\dot{y}$, & $\dot{z}$ excudi debent ex tertiâ aſſumptâ Æquatione, quâ definiri poteſt Longitudo ipſius PD, aut y. Deinde ſumere debes $PC = \frac{1 - y\dot{y}}{\dot{z}}$; $PL = \dot{y} \times PC$; ac $DC = CP - y$, ut in Problemate ſuperiore.

EXEMPL. I.

Sit $as - ss = tt$ Æquatio ad datam Curvam QR, quæ erit Circulus; exprimat $xx = as$ Relationem ipſarum AP & MN, ac $\frac{2}{3}u = y$ Relationem Longitudinis Curvæ datæ QR, & Rectæ PD. Per primam erit $a\dot{s} - 2s\dot{s} = 2t\dot{t}$, aut $\frac{a - 2s}{2t}\dot{s} = \dot{t}$; Quapropter $\frac{a\dot{s}}{2t} = \sqrt{\dot{s}\dot{s} + \dot{t}\dot{t}} = \dot{u}$. Per ſecundam eſt $2x = a\dot{s}$, & ideo $\frac{x}{t} = \dot{u}$; & per tertiam $\frac{2}{3}\dot{u} = \dot{y}$; id eſt, $\frac{2x}{3t} = \dot{z}$; & idcirco $\frac{2}{3t} - \frac{2x\dot{t}}{3tt} = \dot{z}$. Quibus inventis, accipere debes $PC = \frac{1 - y\ddot{y}}{\dot{z}}$, $PL = \dot{y} \times PC$; & $DC = CP - y$, aut $PC - \frac{2}{3}QR$. Unde conſtat, quòd Longitudo datæ Curvæ QR nequit inveniri, niſi priùs detur Longitudo Rectæ DC, & hinc Longitudo Curvæ, ad quam pertinet Punctum C, & vice versâ.

EXEMPL.

EXEMPL. II.

Stante Æquatione $as - ss = tt$, pone $x = s$, & $uu - 4ax = 4ay$. Ex primâ erues $+\frac{a\dot{s}}{2t} = \dot{u}$, ut ſupra. At è ſecundâ $1 = \dot{s}$, & ideo $\frac{a}{2t} = \dot{u}$. Ex tertiâ verò $2u\dot{u} - 4a = 4a\dot{y}$, aut (eliminando $\dot{u}$) $\frac{u}{4t} - 1 = z$. Quapropter $\frac{\dot{u}}{4t} - \frac{u\dot{t}}{4tt} = \dot{z}$.

EXEMPL. III.

Proponantur hæ tres Æquationes $aa = st$; $a + 3s = x$; & $x + u = y$. Prima, quæ pertinet ad Hyperbolam, dat $o = t\dot{s} + s\dot{t}$ aut $-\frac{t\dot{s}}{s} = \dot{t}$; igitur $\frac{\dot{s}}{s}\sqrt{ss+tt} = \sqrt{\dot{s}\dot{s} + \dot{t}\dot{t}} = \dot{u}$; ſecunda præbet $3\dot{s} = 1$, & ideo $\frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt} = \dot{u}$; Tertia denique $1 + \dot{u} = \dot{y}$ aut $1 + \frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt} = z$; quapropter $\dot{w} = \dot{z}$, ponendo ſcilicet $\dot{w}$ pro Fluxione Radicalis $\frac{1}{3s}\sqrt{ss+tt}$, quam ſi facias $= w$, aut $\frac{1}{9} + \frac{tt}{9ss} = ww$ invenies $\frac{2t\dot{t}}{9ss} - \frac{2tt\dot{s}}{9s^3} = 2w\dot{w}$; Et primùm ſubſtituendo $-\frac{t\dot{s}}{s}$ pro $\dot{t}$, deinde $\frac{1}{3}$ pro $\dot{s}$ & dividendo per $2w$, orietur $\frac{-2tt}{27ws^3} = \dot{w} = \dot{z}$. Nunc, inventis $\dot{y}$, & $\dot{z}$, cetera perficientur ut in primo Exemplo.

Jam, ſi ex quocunque Curvæ Puncto Q demittatur ſuper MN perpendicularis QV, & poſtuletur Curva, cujus Longitudo noſci poſſit ex Areâ QRNV applicatâ ad datam Lineam, hæc data Linea dicatur E, & Longitudo $\frac{QRNV}{E}$, quæ prodit ex hac applicatione, vocetur u, ac Fluxio ejus $\dot{u}$; Quia Fluxio Areæ QRNV eſt ad Fluxionem Areæ Parallelogrammi rectanguli conſtituti ſuper VN,

& cujus altitudo eſt E, ut Ordinata, aut mobilis Linea $NR = t$, quâ deſcribitur Area Curvilinea, eſt ad mobilem Lineam E, quâ eodem tempore deſcribitur Rectangulum; & Fluxiones $\dot{u}$, & $\dot{s}$ Linearum u, & MN, (aut s,) aut Longitudines, quæ exſurgunt applicando has Areas ad datam Lineam E, ſunt in eâdem ratione, erit $\dot{u} = \frac{t\dot{s}}{E}$. Quocirca quærendus eſt per hanc Regulam valor ipſius $\dot{u}$, & cetera conficienda, ut in præcedentibus Exemplis.

Exempl. IV.

Sit QR Hyperbola, quæ definitur Æquatione $aa + \frac{ass}{c} = tt$; hinc prodit (per Probl. I.) $\frac{a\dot{s}s}{c} = t\dot{t}$, vel $\frac{a\dot{s}s}{ct} = \dot{t}$; ſi jam aſſumas duas alias Æquationes $x = s$, & $y = u$; ex primâ aſſequeris $1 = \dot{s}$, unde $\dot{u} = \frac{t\dot{s}}{E} = \frac{t}{E}$, ultima verò præbebit $\dot{u} = \dot{y}$ aut $z = \frac{t}{E}$, quapropter $\dot{z} = \frac{\dot{t}}{E}$, & ſubſtituendo $\frac{ass}{ct}$ aut $\frac{as}{ct}$ pro $\dot{t}$, reperies $\frac{as}{Ect} = \dot{z}$. Nunc inventis $\dot{y}$, & $\dot{z}$, fac $\frac{1 - \dot{y}\dot{y}}{\dot{z}} = CP$, & $\dot{y} \times CP = PL$, ut priùs, & ſic determinabitur Punctum C, & Curva, in quâ eſt Punctum illud. Hujus autem Curvæ Longitudo innoteſcet ex Longitudine DC, quæ æquivalet ipſi $CP - u$, ut jam ſatis demonſtravimus.

Sed, & alia Methodus adeſt hujus Problematis reſolvendi, & hæc in eo tota verſatur, ut inveniantur Curvæ, quarum Fluxiones ſint aut æquales Fluxionibus Curvæ propoſitæ, aut compoſitæ ex hujus, & alterius Lineæ Fluxionibus. Hæc Methodus aliquando utilis eſt, cùm Curvæ mechanicæ transformandæ ſunt in æquales geometricas Curvas, cujus rei præclarum Exemplum habemus in Lineis Spiralibus.

Sit enim (*Fig*. 53.) AB Recta positione data; DB Arcus, qui moveatur super AB, tanquam Abscissa, & cujus Centrum semper sit A; AD*d* Spiralis, quâ Arcus isti semper terminantur; *bd* Arcus infinitè priori proximus, aut Locus, in quem venit hic Arcus exiguo motu; DC perpendiculariter insistat Arcui *bd*; & *d*G sit illorum Arcuum differentia; AH alia Curva æqualis Spirali AD; BH Recta, quæ ad rectos Angulos movetur super AB, & quæ finitur Curvâ AH; *bh* Locus quamproximus, in quem Linea pervenit motu suo, & HK perpendicularis ad *bh*. Jam, in infinitè exiguis Triangulis DC*d*, HK*h*, quia DC, & HK æquales sunt eidem tertiæ Lineæ B*b*, & idcirco mutuò æquales, & D*d* ac H*h* (per Hypothesim) sunt correspondentes æqualium Curvarum partes, & ideo æquales, ac recti sunt Anguli ad C & K; æqualia pariter erunt reliqua latera C*d*, & K*h*. Præterea, quia AB : BD :: A*b* : *b*C : *b*A — AB (B*b*) : *bc* — BD (CG), idcirco $\frac{BD \times Bb}{AB}$ = CG; Hoc dempto ex *d*G remanet $dG - \frac{DB \times Bb}{AB} = dC = hK$. Dic igitur AB = z; BD = u; & BH = y, earúmque Fluxiones $\dot{z}$; $\dot{u}$; & $\dot{y}$ respectivè; Cùm B*b*, *d*G, & *h*K sint unà genita earundem Momenta, quibus accedentibus eæ Lineæ evadunt A*b*; *b*D; & *bh*, ea Momenta sunt inter se, ut Fluxiones. Igitur in ultimâ Æquatione pro Momentis ponantur Fluxiones, & symbola pro Lineis, ac habebitur $\dot{u} - \frac{u\dot{z}}{z} = \dot{y}$. Nunc si $\dot{z}$ ponatur æquabilis, aut Unitas, ad quam ceteræ Fluxiones referuntur, Æquatio erit $\dot{u} - \frac{u}{z} = \dot{y}$.

Quapropter, si Relatio quæ existit inter AB, & BD, (aut inter z, & u,) exponatur Æquatione aliquâ Spiralem determinante, dabitur Fluxio $\dot{u}$ (per Probl. I.) & ideo etiam Fluxio $\dot{y}$, eam ponendo æqualem $\dot{u} - \frac{u}{z}$. Et (per Probl. II.) dabitur Linea y, aut BH, cujus illa est Fluxio.

TAB. IX.

EXEMPL. I.

Si detur Æquatio $\frac{zz}{a} = u$, quæ eſt ad Spiralem ARCHIMEDIS, erit (per Probl. I.) $\frac{2z\dot{z}}{a} = \dot{u}$; hinc aufer $\frac{u}{z}$, aut $\frac{z}{a}$, reſtabit $\frac{z\dot{z}}{a} = \dot{y}$; igitur (per Probl. II.) $\frac{zz}{2a} = y$. Quæ Æquatio monſtrat Curvam AH, cui æqualis eſt Spiralis AD, eſſe Parabolam *Apollonianam*, cujus Latus rectum eſt $2a$, & Ordinata BH æqualis ſemiſſi Arcûs BD.

EXEMPL. II.

Si proponeretur Spiralis definita per Æquationem $z^3 = auu$; aut $u = \frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$. hinc aſſequeremur (per Probl. I.) $\dot{u} = \frac{3z^{\frac{1}{2}}\dot{z}}{2a^{\frac{1}{2}}}$, unde ſubtrahe $\frac{u}{z}$, aut $\frac{z^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}$ reſtat $\frac{z^{\frac{1}{2}}\dot{z}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$; hinc autem conficiemus (per Probl. II.) $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{3a^{\frac{1}{2}}} = y$. Id eſt, $\frac{1}{3}$ BD = BH, & AB erit Parabola ſecundi generis.

EXEMPL. III.

Si Æquatio ad Spiralem eſſet $z\sqrt{\frac{a+z}{c}} = u$; haberemus (per Probl. I.) $\frac{2a+3z}{2\sqrt{ac+cz}}\dot{z} = \dot{u}$; unde ſi demis $\frac{u}{z}$ aut $\sqrt{\frac{a+z}{c}}$, ſuperſtitem invenies $\frac{z\dot{z}}{2\sqrt{ac+cz}} = \dot{y}$. Jam, quia Quantitas genita Fluxione $\dot{y}$ nequit reperiri per Probl. II., niſi ea reſolvatur in Seriem infinitam, juxta Scholium Problematis IX, eam reduco ad Formam Æquationum,

num, quæ ſunt in primâ Tabularum Columnâ, ſubſtituendo z^{η} pro z; quo facto Æquatio ſuperior evadit $\frac{z^{2\eta-1}}{2\sqrt{ac+cz^{\eta}}} = \dot{y}$, quæ eſt ſecundæ Speciei, quarti Ordinis Tabulæ I, Et comparatis Terminis, eſt $d = \frac{1}{2}$; $e = ac$; & $f = c$; itaque $\frac{z-2a}{3c} \times \sqrt{ac+cz} = t = y$; quæ Æquatio pertinet ad Curvam geometricam AH Longitudine æqualem Spirali AD.

PROBL. XII.

Determinare Curvarum Longitudinem.

In præcedenti Problemate demonſtravimus Fluxionem curvæ Lineæ, æqualem eſſe Radici quadratæ extractæ ex Aggregato Quadratorum Fluxionum Abſciſſæ, & Ordinatæ perpendicularis. Accipe igitur Fluxionem Abſciſſæ pro uniformi & determinatâ menſurâ, aut pro Unitate, ad quam reliquæ Fluxiones referuntur; deinde, ex Æquatione Curvam definiente, erue Fluxionem Ordinatæ, & habebis Fluxionem Curvæ, ex quâ (per Probl. II.) deducere poteris ejus Longitudinem.

EXEMPL. I.

Proponatur (*Fig.* 54.) Curva FDH, quæ definitur Æquatione TAB. IX. $\frac{z^3}{aa} + \frac{aa}{12z} = y$; dictis ſcilicet Abſciſſâ $AB = z$, & Ordinatâ mobili $BD = y$. Jam; ex Æquatione iſtâ deduces (per Probl. I.) $\frac{3zz}{aa} - \frac{aa}{12zz} = \dot{y}$ (ponendo Unitatem pro Fluxione ipſius z, & $\dot{y}$ pro Fluxione y). Harum Fluxionum Quadrata in unum conjice, inventurus $\frac{9z^4}{a^4} + \frac{1}{2} + \frac{a^4}{144z^4} = \dot{t}\dot{t}$, &, extracta Radice,

$\frac{3zz}{aa}$

$\frac{3zz}{aa} + \frac{aa}{12zz} = \dot{t}$; Et hinc (per Probl. II.) $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} = t$. Ubi $\dot{t}$ repræsentat Curvæ Fluxionem, & t ejus Longitudinem.

Quamobrem, si petitur Longitudo alicujus partis dD hujus Curvæ, ex Punctis d, & D demitte perpendiculares db & DB, super AB, & pone in valore ipsius t Quantitates Ab & AB seorsum, pro z; eritque differentia Quantitatum hinc prodeuntium Longitudo quæsita dD. *Ex. gr.* sit $Ab = \frac{1}{2}a$, & $AB = a$, scribe $\frac{1}{2}a$ pro z, & invenies $t = -\frac{a}{24}$; Deinde rursùs scribe a pro z, & obtinebis $t = \frac{11a}{12}$, ex hoc valore primum deme, restabit $\frac{23a}{24}$, quæ erit Longitudo ipsius dD. Si verò tantùm Ab determinata esset, & fieret $= \frac{1}{2}a$, & haberetur AB pro indefinitâ, restaret $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z} + \frac{a}{24}$ pro valore dD.

Si noscere cupis partem Curvæ repræsentatam per t, suppone valorem ipsius t nihilo æqualem; unde obtinebis $z^4 = \frac{a^4}{12}$, aut $z = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$. Igitur, sume $Ab = \frac{a}{\sqrt[4]{12}}$, & erige perpendicularem bd, Longitudo Arcûs dD erit t aut $\frac{z^3}{aa} - \frac{aa}{12z}$. Idem dictum volo de aliis Curvis.

Nec diversa via ineunda esset, si proponeretur Curva, cujus Æquatio foret $\frac{z^4}{a^3} + \frac{a^3}{32zz} = \dot{y}$; hinc enim deduceretur $\frac{z^4}{a^3} - \frac{a^3}{32zz} = t$; neque si daretur Æquatio $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = \dot{y}$; ex quâ fieret $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{3}a^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}} = t$. Neque demum si proponeretur Æqua-

tio

tio generalis $cz^{\theta} + \frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c - 8\theta c} = y$, in quâ θ adhibetur ad indicandum quemvis numerum ſive integrum, ſive fractum. Hæc autem Æquatio præbet $cz^{\theta} - \frac{z^{2-\theta}}{4\theta\theta c - 8\theta c} = t$.

EXEMPL. II.

Proponatur Curva definita hac Æquatione $\frac{2aa + 2zz}{3aa} \times \sqrt{aa + zz} = y$; Erit (per Probl. I.) $\dot{y} = \frac{4a^4 z + 8aaz^3 + 4z^5}{3a^4 y}$, aut (exterminato y) $\dot{y} = \frac{2z}{aa}\sqrt{aa + zz}$. Hujus Quadratum adde Unitati, & obtinebis $1 + \frac{4zz}{aa} + \frac{4z^4}{a^4}$, & erit ejus Radix $1 + \frac{2zz}{aa} = \dot{t}$. Hinc autem (per Probl. II.) erues $z + \frac{2z^3}{3aa} = t$.

EXEMPL. III.

Proponatur Parabola ſecundi generis, cujus Æquatio eſt $z^3 = ayy$, aut $\frac{z^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} = y$; hæc (per Probl. I.) dat $\frac{3z^{\frac{1}{2}}}{2a^{\frac{1}{2}}} = \dot{y}$. Igitur, $\sqrt{1 + \frac{9z}{4a}} = \sqrt{1 + \dot{y}\dot{y}} = \dot{t}$. Sed quia Longitudo Curvæ genita Fluxione $\dot{t}$, nequit inveniri per Probl. II. abſque Reductione ad infinitam Seriem Terminorum ſimplicium, conſulo Tabulas Probl. IX., & juxta Scholium ad illud pertinens, invenio $t = \frac{\overline{8a + 18z} \times \sqrt{1 + \frac{9z}{4a}}}{27}$.

Et eâdem ratione poteris invenire Longitudinem Parabolarum expreſſarum Æquationibus $z^5 = ay^4$; $z^7 = ay^6$; $z^9 = ay^8$; &c.

EXEMPL. IV.

Proponatur Parabola, cujus Æquatio eſt $z^4 = ay^3$; aut $\frac{z^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = y$. hinc (per Probl. I.) orietur $\frac{4z^{\frac{1}{3}}}{3a^{\frac{1}{3}}} = \dot{y}$. Igitur $\sqrt{1 + \frac{16z^{\frac{2}{3}}}{9a^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{1 + \dot{y}\dot{y}} = \dot{t}$. His inventis, conſulo Tabulas, ſecundùm ſupradictum Scholium, & hos Terminos comparando cum Terminis ſecundi Theorematis quinti ordinis Tabulæ II, habeo $z^{\frac{1}{3}} = x$; $\sqrt{1 + \frac{16xx}{9a^{\frac{2}{3}}}} = u$; & $\frac{3}{2}s = t$. Ubi x quidem denotat Hyperbolæ Abſciſſam, y Ordinatam, s verò Aream, & t Longitudinem, quæ prodit Aream $\frac{3}{2}s$ applicando Unitati lineari.

Eodem Pacto Longitudines Parabolarum $z^6 = ay^5$; $z^8 = ay^7$; $z^{10} = ay^9$; &c. revocari poſſunt ad Aream Hyperbolæ.

EXEMPL. V.

TAB. IX. Proponatur (*Fig.* 55.) Ciſſoïs Veterum, cujus Æquatio eſt $\frac{aa - 2az + zz}{\sqrt{az - zz}} = y$; hinc fit (per Probl. I.) $-\frac{a - 2z}{2zz} \times \sqrt{az - zz} = \dot{y}$; & idcirco $\frac{a}{2z}\sqrt{\frac{a + 3z}{z}} = \sqrt{1 + \dot{y}\dot{y}} = \dot{t}$, quæ, ſcribendo z^{η} pro $\frac{1}{z}$, aut z^{-1}, evadit $\frac{a}{2z}\sqrt{az^{\eta} + 3} = \dot{t}$, Æquatio primæ Speciei tertii Ordinis Tabulæ II; Jam, per Terminorum comparationem, invenio $\frac{a}{2} = d$; $3 = e$; & $a = f$; itaque $z = \frac{1}{z^{\eta}} = xx$; $\sqrt{a + 3xx} = u$, & $6s - \frac{2u^3}{x} = \frac{4de}{\eta f} \times \frac{u^3}{2ex} - s = t$. Hæc autem Æquatio, accipiendo a pro Unitate,

tate, per quam multiplicatæ aut divisæ hæ Quantites revocari possunt ad justum Dimensionum numerum, evadit $az = xx$; $\sqrt{aa + 3xx} = u$; & $\frac{6s}{a} - \frac{2u^3}{ax} = t$; quæ sic construi potest.

Sit DV Cissois; VA Diameter Circuli, ad quem illa pertinet; AF Cissoidis Asymptotus; & DB perpendicularis ad AV, & Curvæ occurrens in D. Semiaxe FA = AV, & Semiparametro GA $= \frac{1}{3}$ AV describe Hyperbolam FkK; deinde sume AC mediam proportionalem inter BA, & AV; per C, & V age Ck, & VK perpendiculares ipsi AV, & occurrentes Hyperbolæ in k & K, quam in his Punctis tangant Rectæ kt, & KT occurrentes VA in t & T; & AV applicetur Rectangulum AVNM æquale spatio TKkt. Longitudinem Cissoidis dico sextuplam Altitudinis VN.

EXEMPL. VI.

Sit (*Fig.* 39.) Ad Ellipsis, cujus Æquatio $\sqrt{az - 2zz} = y$, & proponatur Curva mechanica AD ejus naturæ, ut si producatur Bd, aut y donec ea Curvæ occurrat in D, sit BD æqualis Arcui Ad Ellipseos. Nunc, ut hujus Longitudo determinetur; Æquatio $\sqrt{az - 2zz} = y$ dabit $\frac{a - 4z}{2\sqrt{az - 2zz}} = \dot{y}$, cujus Quadrato addens Unitatem, consequeris $\frac{aa - 4az + 8zz}{4az - 8zz}$, Quadratum Fluxionis Arcûs Ad. Huic rursus adde Unitatem, unde fiet $\frac{aa}{4az - 8zz}$, cujus Radix quadrata $\frac{a}{2\sqrt{az - 2zz}}$ est Fluxio Curvæ AD. Ubi, si z extrahatur extra signum radicale, & pro $\overline{z}^{-1}$ scribatur z^{η}, ea fiet $\frac{a}{2z\sqrt{az^{\eta} - 2}}$, Fluxio primæ Speciei quarti Ordinis Tabulæ

TAB. VI.

II. Hinc, Terminis collatis, deteges $d = \frac{1}{2}a$; $e = -2$; &

$f = a$

$f = a$, quapropter $z = \frac{1}{z^{\eta}} = x$; $\sqrt{ax - 2xx} = u$; & $\frac{8s}{a} - \frac{4ux}{a} + u = \frac{\overline{8de}}{\eta ff} \times \overline{s - \frac{1}{2}ux - \frac{fu}{4e}} = t.$

En hujus Conſtructionem; Age dC (poſito C Ellipſeos Centro;) ſuper A C conſtitue Parallelogrammum æquale Sectori ACd; hujus dupla Altitudo æquabit Longitudinem Curvæ A D.

Exempl. VII.

TAB. IX. Sint (*Fig.* 56.) $A\beta = \phi$ (N°. 1.), & $\alpha\delta$ Hyperbola, cujus Æquatio $\sqrt{-a + b\phi\phi} = \beta\delta$, & Tangens T$\delta$: Jam proponatur Curva V$d$D, cujus Abſciſſa AB ſit $\frac{1}{\phi\phi}$, & cujus Ordinata perpendicularis BD, Longitudo, quæ oritur ex applicatione Areæ $\alpha\delta$ Tα, ad Unitatem Linearem. Nunc determinaturus Longitudinem hujus Curvæ VD, quæro Fluxionem Areæ $\alpha\delta$Tα poſitâ uniformi Fluxione ipſius AB, eámque reperio $\frac{a}{4bz}\sqrt{b - az}$, (vocando ſcilicet AB $= z$, & ejus Fluxionem $= 1$,). Eſt enim AT $= \frac{a}{b\phi} = \frac{a}{b}\sqrt{z}$ cujus Fluxio eſt $\frac{a}{2b\sqrt{z}}$. Hujus autem ſemiſſis ductus in Altitudinem $\beta\delta$, aut $\sqrt{-a + \frac{b}{z}}$ eſt Fluxio Areæ $\alpha\delta$T deſcriptæ à Tangente δT. Quapropter hæc Fluxio eſt $\frac{a}{4bz}\sqrt{b - az}$, quæ applicata Unitati fit Fluxio Ordinatæ BD. Hujus Quadratum $\frac{aab - a^3z}{16bbzz}$ adde Unitati Quadrato Fluxionis ipſius BD, & exſurget $\frac{aab - a^3z + 16bbzz}{16bbzz}$, cujus Radix $\frac{1}{4bz}\sqrt{aab - a^3z + 16bbzz}$, eſt Fluxio Curvæ VD. Sed hæc eſt Fluxio primæ Speciei ſeptimi Ordinis Tabulæ II: Confer Terminos, & invenies $\frac{1}{4b} = d$; aab

$=$

Fig. 43.

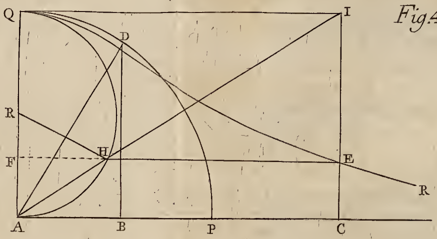


Fig. 44.

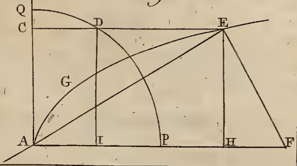


Fig. 45.

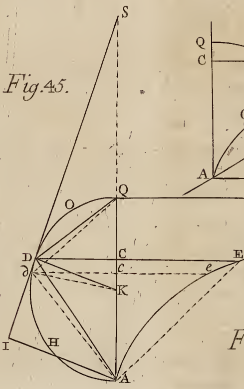
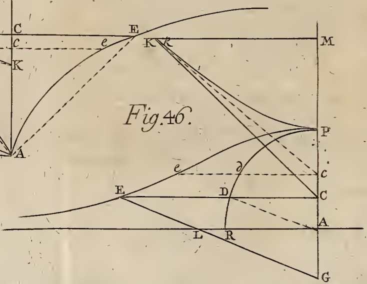


Fig. 46.



$= e$; $-a^3 = f$; $16bb = g$ & idcirco $z = x$; & $\sqrt{aab - a^3x + 16bbxx} = u$, (Æquatio ad Sectionem conicam, puta HG (N°. 2.), cujus Area EFGH est s & ubi EF $= x$; ac FG $= u$;) pariter $\frac{1}{z} = \xi$; & $\sqrt{16bb - a^3\xi + ab\xi\xi} = \gamma$ (Æquatio ad aliam Sectionem conicam, puta ML (N°. 3.), cujus Area IKLM est σ, & ubi IK $= \xi$; & KL $= \gamma$) Demum $t = \frac{2aabb\xi\gamma - a^3b\gamma - a^4u - 4aabb\sigma - 32abbs}{64b^4 - a^4}$.

Quapropter, ut innotescat aliqua Curvæ VD pars Dd, demitte db perpendicularem ad AB, & fac A$b = z$; deinde per nuper inventa quære valorem ipsius t. Jam fac AB $= z$, & hinc rursus erue t. Tunc Longitudo quæsita Dd exponetur per differentiam horum duorum valorum ipsius t.

Exempl. VIII.

Proponatur Hyperbola, cujus Æquatio sit $\sqrt{aa + bzz} = y$; Hinc (per Probl. I.) habebis $\dot{y} = \frac{bz}{y}$, aut $\frac{bz}{\sqrt{aa + bzz}}$. Cujus Quadratum adde Unitati; hujus autem Summæ Radix erit $\sqrt{\frac{aa + bzz + bbzz}{aa + bzz}} = \dot{t}$. Nunc, quia Fluxio hæc abest è Tabulis, eam redigo in Seriem infinitam, & primò, per Divisionem, fit $\dot{t} = \sqrt{1 + \frac{bb}{aa}zz - \frac{b^3}{a^4}z^4 + \frac{b^4}{a^6}z^6 - \frac{b^5}{a^8}z^8}$; &c. deinde, per Extractionem Radicis, $\dot{t} = 1 + \frac{bb}{2aa}zz - \frac{4b^3 + b^4}{8a^4}z^4 + \frac{8b^4 + 4b^5 + b^6}{16a^6}z^6$; &c. Unde (per Probl. II.) invenietur Arcus hyperbolicus, aut $t = z + \frac{bb}{6aa}z^3 - \frac{4b^3 + b^4}{40a^4}z^5 + \frac{8b^4 + 4b^5 + b^6}{112a^6}z^7$; &c.

Si proponeretur Ellipsis $\sqrt{aa - bzz} = y$; ubique mutanda forent signa ipsius b, unde conficeretur $z + \frac{bb}{6aa}z^3 + \frac{4b^3 - b^4}{40a^4}z^5 + \frac{8b^4 - 4b^5 + b^6}{112a^6}z^7$; &c. pro Longitudine ejus Arcûs. Similiter, ponendo Unitatem pro b, erit $z + \frac{z^3}{6aa} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6}$; &c. Longitudo Arcûs Circularis. Numerales autem Coefficientes hujus Seriei possunt inveniri in infinitum, continuâ Multiplicatione Terminorum hujus Progressionis $\frac{1 \times 1}{2 \times 3}$; $\frac{3 \times 3}{4 \times 5}$; $\frac{5 \times 5}{6 \times 7}$; $\frac{7 \times 7}{8 \times 9}$; $\frac{9 \times 9}{10 \times 11}$; &c.

EXEMPL. IX.

TAB. IX. Denique proponatur (*Fig.* 57.) Quadratrix VDE, cujus Vertex est V, A Centrum, & AV Semidiameter Circuli interioris, cui ea aptatur, & rectus sit Angulus VAE. Jam, per A ducatur quævis Recta AKD occurrens Circulo in K, & Quadratrici in D, & super AE demittantur KG, DB ad rectos Angulos; dic KV $= x$; VA $= a$; AG $= z$, & BD $= y$; & erit, ut in superiore Exemplo, $x = z + \frac{z^3}{6aa} + \frac{3z^5}{40a^4} + \frac{5z^7}{112a^6}$; &c. Extrahe Radicem z, unde prodibit $z = x - \frac{x^3}{6aa} + \frac{x^5}{120a^4} - \frac{x^7}{5040a^6}$; &c. cujus Quadratum subduc ex AKq, aut aa; & reliqui Radix $a - \frac{xx}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} - \frac{x^6}{720a^5}$; &c. erit GK. Nunc, quia ob Quadratricis naturam est AB $=$ VR $= x$, & est AG : GK :: AB : BD (y), divide AB $\times$ GK per AG, quo pacto habebis $y = a - \frac{xx}{3a}$

Fig. 47.

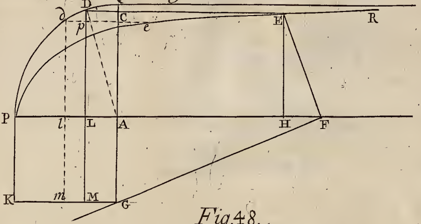


Fig. 48.

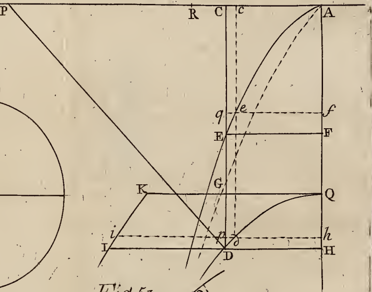


Fig. 49.

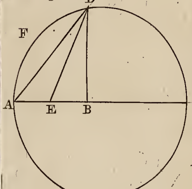


Fig. 50.

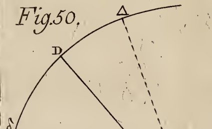
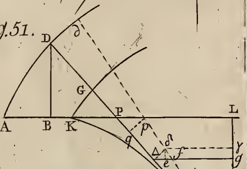
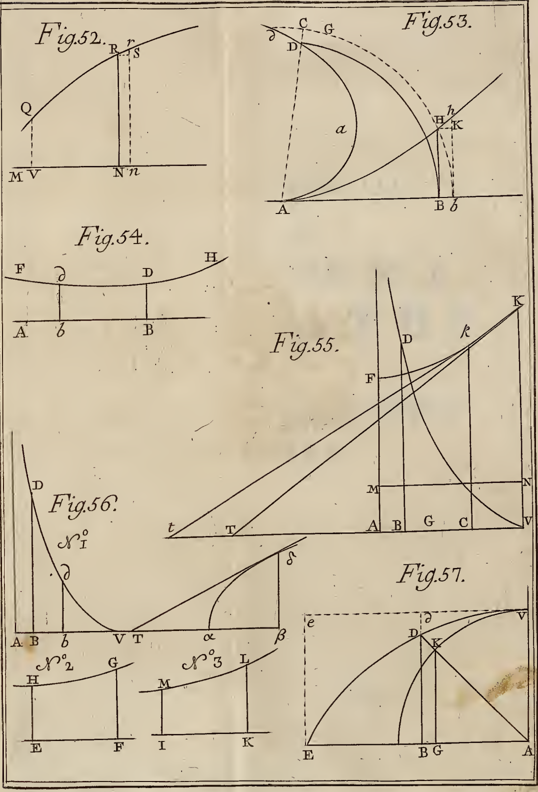


Fig. 51.



$-\frac{x^4}{45a^3}-\frac{2x^6}{945a^5}$; &c. Ergo (per Probl. I.) $\dot{y}=-\frac{2x}{3a}-\frac{4x^3}{45a^3}-\frac{4x^5}{315a^5}$; &c., cujus Quadrato adjice Unitatem, & quære Summæ Radicem, futuram $1+\frac{2xx}{9aa}+\frac{14x^4}{405a^4}+\frac{604x^6}{127575a^6}$; &c. $=t$. Unde (per Probl. II.) poteſt obtineri Arcus Quadratricis, videlicet VD $=x+\frac{2x^3}{27aa}+\frac{14x^5}{2825a^4}+\frac{604x^7}{893025a^6}$; &c. &c. &c.


Fig.52.
Q
R
r
S
M
V
N
n
Fig.53.
C
G
∂
D
a
H
h
K
A
B
b
Fig.54.
F
∂
D
H
A
b
B
Fig.55.
K
D
k
F
M
N
t
T
A
B
G
C
V
Fig.56.
N°1
D
∂
δ
A
B
b
V
T
α
β
N°2
H
G
E
F
N°3
M
L
I
K
Fig.57.
e
∂
V
D
K
E
B
G
A

OPUSCULUM III.

ISAACI

NEWTONI TRACTATUS DE QUADRATURA CURVARUM.

Editus LONDINI 1706.

ISAACI

NEWTONI TRACTATUS DE QUADRATURA CURVARUM.

INTRODUCTIO.

QUANTITATES Mathematicas, non ut ex partibus quàm minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas hìc conſidero. Lineæ deſcribuntur ac deſcribendo generantur non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum Punctorum; Superficies per motum Linearum; Solida per motum Superficierum; Anguli per rotationem Laterum; Tempora per fluxum continuum; & ſic in ceteris. Hæ Geneſes in rerum naturâ locum verè

habent, & in Motu Corporum quotidie cernuntur. Et ad hunc modum Veteres ducendo Rectas mobiles in longitudinem Rectarum immobilium Genesim docuerunt Rectangulorum.

Considerando igitur, quòd Quantitates æqualibus Temporibus crescentes & crescendo genitæ, pro Velocitate majori vel minori quâ crescunt ac generantur, evadunt majores vel minores, Methodum quærebam determinandi Quantitates ex Velocitatibus Motuum vel Incrementorum, quibus generantur; & has Motuum vel Incrementorum Velocitates nominando *Fluxiones*, & Quantitates genitas nominando *Fluentes*, incidi paulatim *annis* 1665, & 1666 in Methodum Fluxionum, quâ hìc usus sum in Quadraturâ Curvarum.

Fluxiones sunt quàm proximè ut Fluentium Augmenta æqualibus Temporis particulis quàm minimis genita, &, ut accuratè loquar, sunt in primâ Ratione Augmentorum nascentium; exponi autem possunt per Lineas quascunque, quæ sunt ipsis proportionales.

TAB. I. Ut si (*Fig.* 1.) Areæ ABC, $ABDG$ Ordinatis BC, BD super Basi AB uniformi cum Motu progredientibus describantur, harum Arearum Fluxiones erunt inter se ut Ordinatæ describentes BC & BD, & per Ordinatas illas exponi possunt; propterea quòd Ordinatæ illæ sunt ut Arearum Augmenta nascentia.

Progrediatur Ordinata BC de loco suo BC in locum quemvis novum bc.

Compleatur Parallelogrammum $BCEb$, ac ducatur Recta VTH, quæ Curvam tangat in C, ipsisque bc & BA productis occurrat in T & V: & Abscissæ AB, Ordinatæ BC, & Lineæ curvæ ACc Augmenta modò genita erunt Bb, Ec & Cc; & in horum Augmentorum nascentium Ratione primâ sunt Latera Trianguli CET, ideòque Fluxiones ipsarum AB, BC, & AC sunt ut Trianguli illius CET Latera CE, ET, & TC, & per eadem Latera exponi possunt, vel, quod perinde est, per Latera Trianguli consimilis VBC.

Eodem recidit, si sumantur Fluxiones in ultimâ Ratione partium evanescentium. Agatur Recta Cc, & producatur eadem ad K. Redeat Ordinata bc in locum suum priorem BC, &, coeuntibus

Punctis

Punctis C & c, Recta CK coincidet cum Tangente CH, & Triangulum evanescens CEc in ultimâ suâ formâ evadet simile Triangulo CET, & ejus Latera evanescentia CE, Ec, & Cc erunt ultimò inter se, ut sunt Trianguli alterius CET Latera CE, ET, & TC; & propterea in hac Ratione sunt Fluxiones Linearum AB, BC & CA. Si Puncta C & c parvo quovis intervallo à se invicem distant, Recta CK parvo intervallo à Tangente CH distabit. Ut Recta CK cum Tangente CH coincidat, & Rationes ultimæ Linearum CE, Ec, & cC inveniantur, debent Puncta C & c coire & omnino coincidere. Errores quàm minimi in rebus mathematicis non sunt contemnendi.

Simili argumento, si Circulus Centro B, Radio BC, descriptus in longitudinem Abscissæ AB ad Angulos rectos uniformi cum motu ducatur, Fluxio Solidi geniti ABC erit ut Circulus ille generans; & Fluxio Superficiei ejus erit ut Perimeter Circuli illius; & Fluxio Lineæ curvæ AC conjunctim. Nam, quo Tempore Solidum ABC generatur ducendo Circulum illum in longitudinem Abscissæ AB, eodem Superficies ejus generatur ducendo Perimetrum Circuli illius in Longitudinem Curvæ AC. Hujus Methodi accipe etiam Exempla, quæ sequuntur.

II.

Recta (Fig. 2.) P B *circa Polum datum* P *revolvens secet aliam Positione datam Rectam* A B : *quaritur Proportio Fluxionum Rectarum illarum* A B *&* P B. TAB. III.

Progrediatur Recta PB de loco suo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipsi PB æqualis, & ad AB ducatur PD sic, ut Angulus bPD æqualis sit Angulo bBC; &, ob similitudinem Triangulorum bBC, bPD, erit Augmentum Bb ad Augmentum Cb, ut Pb ad bD. Redeat jam Pb in locum suum priorem PB, ut Augmenta illa evanescant, & evanescentium Ratio ultima, id est, Ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ est PB ad DB, existente Angulo PDB recto; & propterea in hac Ratione est Fluxio ipsius AB ad Fluxionem ipsius PB.

II.

TAB. II. *Recta* (Fig. 3.) PB *circa datum Polum* P *revolvens secet alias duas Positione datas Rectas* AB *&* AE, *in* B *&* E: *quaeritur Proportio Fluxionum Rectarum illarum* AB *&* AE.

Progrediatur Recta revolvens PB de loco suo PB in locum novum Pb. Rectas AB, AE in Punctis b & e secantem, & Rectae AE, Parallela BC ducatur ipsi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC, ut Ab ad Ae; & BC ad Ee, ut PB ad PE; &, conjunctis Rationibus, Bb ad Ee, ut $Ab \times PB$ ad $Ae \times PE$. Redeat jam Linea Pb in locum suum priorem PB, & Augmentum evanescens Bb erit ad Augmentum evanescens Ee, ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$, ideóque in hac Ratione est Fluxio Rectae AB ad Fluxionem Rectae AE.

Hinc si Recta revolvens PB Lineas quasvis curvas Positione datas secet in Punctis B, & E, & Rectae jam mobiles AB, AE, Curvas illas tangant in sectionum Punctis B, & E; erit Fluxio Curvae, quam Recta AB tangit, ad Fluxionem Curvae, quam Recta AE tangit, ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$. Id quod etiam eveniet, si Recta PB Curvam aliquam Positione datam perpetuò tangat in Puncto mobili P.

III.

Fluat Quantitas x *uniformiter, & invenienda sit Fluxio Quantitatis* x^n.

Quo Tempore Quantitas x fluendo evadit $x + o$. Quantitas x^n evadet $\overline{x+o}^{\,n}$; id est, per Methodum Serierum infinitarum,

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + \text{; \&c.}$$

Et Augmenta o & $nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} +$; &c.

sunt ad se invicem, ut 1 & $nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} +$; &c.

Eva-

Evanefcant jam Augmenta illa, & eorum Ratio ultima erit 1 ad nx^{n-1}: ideóque Fluxio Quantitatis x eft ad Fluxionem Quantitatis x^n, ut 1 ad nx^{n-1}.

Similibus argumentis, per Methodum Rationum primarum & ultimarum, colligi poffunt Fluxiones Linearum, feu rectarum feu curvarum, in cafibus quibufcunque; ut & Fluxiones Superficierum, Angulorum, & aliarum Quantitatum. In finitis autem Quantitatibus Analyfin fic inftituere, & finitarum nafcentium vel evanefcentium Rationes primas vel ultimas inveftigare, confonum eft Geometriæ Veterum; & volui oftendere quòd in Methodo Fluxionum non opus fit Figuras infinitè parvas in Geometriam introducere. Peragi tamen poteft Analyfis in Figuris quibufcunque, feu finitis feu infinitè parvis, quæ Figuris evanefcentibus finguntur fimiles, ut & in Figuris, quæ per Methodos *Indivifibilium* pro infinitè parvis haberi folent, modò cautè procedas.

Ex Fluxionibus invenire Fluentes Problema difficilius eft, & Solutionis primus gradus æquipollet Quadraturæ Curvarum; de quâ fequentia olim fcripfi.

TRACTA-

TRACTATUS
DE
QUADRATURA CURVARUM.

QUANTITATES indeterminatas ut Motu perpetuo crescentes vel decrescentes, id est, ut fluentes vel defluentes in sequentibus considero; designóque litteris z, y, x, u, & earum Fluxiones, seu Celeritates crescendi, noto iisdem litteris punctatis $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{u}$. Sunt & harum Fluxionum Fluxiones, seu mutationes magis aut minùs celeres, quas ipsarum z, y, x, u, Fluxiones secundas nominare licet, & sic designare $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{u}$, & harum Fluxiones primas, seu ipsarum z, y, x, u, Fluxiones tertias, sic $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{u}$, & quartas sic $\ddddot{z}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{u}$. Et quemadmodum $\dddot{z}$, $\dddot{y}$, $\dddot{x}$, $\dddot{u}$, sunt Fluxiones Quantitatum $\ddot{z}$, $\ddot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{u}$; & hæ sunt Fuxiones Quantitatum $\dot{z}$, $\dot{y}$, $\dot{x}$, $\dot{u}$; & hæ sunt Fluxiones Quantitatum primarum z, y, x, u: sic hæ Quantitates considerari possunt ut Fluxiones aliarum, quas sic designabo, z', y', x', u'; & hæ ut Fluxiones aliarum z'', y'', x'', u''; & hæ ut Fluxiones aliarum z''', y''', x''', u'''. Designant igitur z'', z', z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, $\ddddot{z}$; &c. Seriem Quantitatum, quarum quælibet posterior est Fluxio præcedentis; & quælibet prior est Fluens Quantitas Fluxionem habens subsequentem. Similis est Series $\overset{\prime\prime}{\overline{\sqrt{az-zz}}}$, $\overset{\prime}{\overline{\sqrt{az-zz}}}$,

$\sqrt{az}$

$\sqrt{az - zz}$, $\dot{\overline{\sqrt{az - zz}}}$, $\ddot{\overline{\sqrt{az - zz}}}$, $\dddot{\overline{\sqrt{az - zz}}}$; ut & Series, $\frac{az+zz}{a-z}{}^{\prime\prime}$, $\frac{az+zz}{a-z}{}^{\prime}$, $\frac{az+zz}{a-z}$, $\frac{az+zz}{a-z}{}^{\cdot}$, $\frac{az+zz}{a-z}{}^{\cdot\cdot}$, $\frac{az+zz}{a-z}{}^{\cdot\cdot\cdot}$: & notandum eſt, quòd Quantitas quælibet prior in his Seriebus eſt, ut Area Figuræ curvilineæ, cujus ordinatim Applicata rectangula eſt Quantitas poſterior & Abſciſſa eſt z: uti $\overset{\prime}{\overline{\sqrt{az - zz}}}$, Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $\sqrt{az - zz}$, & Abſciſſa z. Quò autem ſpectant hæc omnia patebit in Propoſitionibus, quæ ſequuntur.

PROPOSITIO I.

PROBLEMA I.

Datâ Æquatione quotcunque Fluentes Quantitates involvente, invenire Fluxiones.

SOLUTIO.

Multiplicetur omnis Æquationis Terminus per Indicem Dignitatis Quantitatis cujuſque fluentis quam involvit, & in ſingulis Multiplicationibus mutetur Dignitatis Latus in Fluxionem ſuam; & Aggregatum Factorum omnium ſub propriis Signis erit Æquatio nova.

EXPLICATIO.

Sunto a, b, c, d, *&c.* Quantitates determinatæ & immutabiles, & proponatur Æquatio quævis Quantitates fluentes z, y, x, &c. involvens, uti $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$. Multiplicentur Termini primò per Indices Dignitatum x, & in ſingulis Multiplicationibus pro Dignitatis Latere, ſeu x unius Dimenſionis, ſcribatur $\dot{x}$; & Summa Factorum erit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy$. Idem

Idem fiat in y, & prodibit $-2xy\dot{y}$. Idem fiat in z, & prodibit $aa\dot{z}$. Ponatur Summa Factorum æqualis nihilo, & habebitur Æquatio $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2xy\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Dico, quòd hac Æquatione definitur Relatio Fluxionum.

DEMONSTRATIO.

Nam, sit o Quantitas admodum parva, & sunto $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, Quantitatum z, y, x Momenta, id est, Incrementa momentanea synchrona. Et, si Quantitates fluentes jam sunt z, y, & x, hæ, post momentum temporis, Incrementis suis $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$, auctæ, evadent $z+o\dot{z}$, $y+o\dot{y}$, $x+o\dot{x}$, quæ in Æquatione primâ pro z, y, & x scriptæ, dant Æquationem $x^3 + 3xxo\dot{x} + 3xoo\dot{x}\dot{x} + ooo\dot{x}^3 - xyy - o\dot{x}yy - 2xo\dot{y}y - 2\dot{x}oo\dot{y}y - xoo\dot{y}\dot{y} - \dot{x}ooo\dot{y}\dot{y} + aaz + aao\dot{z} - b^3 = 0$. Subducatur Æquatio prior, & Residuum divisum per o erit $3\dot{x}xx + 3\dot{x}\dot{x}ox + \dot{x}^3oo - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y - 2\dot{x}o\dot{y}y - xo\dot{y}\dot{y} - \dot{x}oo\dot{y}\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Minuatur Quantitas o in infinitum, & neglectis Terminis evanescentibus, restabit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{z} = 0$. Q. E. D.

EXPLICATIO PLENIOR.

Ad eundem modum si Æquatio esset $x^3 - xyy + aa \times \sqrt{ax - yy} - b^3 = 0$, produceretur $3xx\dot{x} - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa \times \dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}} = 0$. Ubi, si Fluxionem $\dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}}$ tollere velis, pone $\sqrt{ax-yy} = z$, & erit $ax - yy = zz$, & (per hanc Propositionem) $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$, seu $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$, hoc

est,

est, $\frac{a\dot{x}-2\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = \dot{\overline{\sqrt{ax-yy}}}$. Et inde $3xx\dot{x} - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y$

$+ \frac{a^3\dot{x}-2aa\dot{y}y}{2\sqrt{ax-yy}} = 0$.

Et, per Operationem repetitam pergitur ad Fluxiones secundas, tertias, & sequentes.

Sit Æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & fiet, per Operationem primam, $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}yy - 4\dot{z}z^3 = 0$; per secundam $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}yy + 3z\ddot{y}yy + 6z\dot{y}\dot{y}y - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}\dot{z}zz = 0$; per tertiam $\dddot{z}y^3 + 9\ddot{z}\dot{y}yy + 9\dot{z}\ddot{y}yy + 18\dot{z}\dot{y}\dot{y}y + 3z\dddot{y}yy + 18z\ddot{y}\dot{y}y$
$+ 6z\dot{y}\dot{y}\dot{y} - 4\dddot{z}z^3 - 36\ddot{z}\dot{z}zz - 24\dot{z}\dot{z}\dot{z}z = 0$.

Ubi verò sic pergitur ad Fluxiones secundas, tertias, & sequentes, convenit Quantitatem aliquam ut uniformiter fluentem considerare, & pro ejus Fluxione primâ Unitatem scribere, pro secundâ verò & sequentibus nihil. Sit Æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, ut supra; & fluat z uniformiter, sitque ejus Fluxio Unitas, & fiet, per Operationem primam $y^3 + 3z\dot{y}yy - 4z^3 = 0$; per secundam $6\dot{y}yy + 3z\ddot{y}yy + 6z\dot{y}\dot{y}y - 12zz = 0$; per tertiam $9\ddot{y}yy$
$+ 18\dot{y}\dot{y}y + 3z\dddot{y}yy + 18z\ddot{y}\dot{y}y + 6z\dot{y}^3 - 24z = 0$.

In hujus autem generis Æquationibus concipiendum est, quòd Fluxiones in singulis Terminis sint ejusdem ordinis, id est, vel omnes primi ordinis $\dot{y}$, $\dot{z}$, vel omnes secundi, $\ddot{y}$, $\dot{y}\dot{y}$, $\dot{y}\dot{z}$, $\dot{z}\dot{z}$, vel omnes tertii $\dddot{y}$, $\ddot{y}\dot{y}$, $\ddot{y}\dot{z}$, $\dot{y}^3$, $\dot{y}\dot{y}\dot{z}$, $\dot{y}\dot{z}\dot{z}$, $\dot{z}^3$, &c. Et, ubi res aliter se habet, complendus est ordo per subintellectas Fluxiones Quantitatis uniformiter fluentis. Sic Æquatio novissima, complendo ordinem tertium, fit $9\dot{z}\ddot{y}yy + 18\dot{z}\dot{y}\dot{y}y + 3z\dddot{y}yy + 18z\ddot{y}\dot{y}y$
$+ 6z\dot{y}^3 - 24z\dot{z}^3 = 0$.

PROPOSITIO II.

PROBLEMA II.

Invenire Curvas, quæ quadrari possunt.

TAB. I. Sit (*Fig.* 1.) ABC Figura invenienda, BC ordinatim Applicata rectangula, & AB Abscissa. Producatur CB ad D ut sit $BD = 1$, & compleatur Parallelogrammum $ABDG$: & Arearum ABC, $ABDG$ Fluxiones erunt ut BC & BD. Assumatur igitur Æquatio quævis, quâ Relatio Arearum definiatur, & inde dabitur Relatio Ordinatarum BC & BD per Prop. I. *Q.E.I.*

Hujus rei Exempla habentur in Propositionibus duabus sequentibus.

PROPOSITIO III.

THEOR. I.

Si pro Abscissâ AB & Areâ AD, seu $AB \times 1$, promiscuè scribatur z, & si pro $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} +$, *&c.* Scribatur R: sit autem Area Curvæ $z^\theta R^\lambda$ erit ordinatim Applicata $BC =$

$$\theta e \begin{matrix} +\theta \\ +\lambda n \end{matrix} fz^n \begin{matrix} +\theta \\ +2\lambda n \end{matrix} gz^{2n} \begin{matrix} +\theta \\ +3\lambda n \end{matrix} hz^{3n} +; \text{ \&c. in } z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}.$$

DEMONSTRATIO.

Nam, si sit $z^\theta R^\lambda = u$, erit, per Prop. I, $\theta \dot{z} z^{\theta - 1} R^\lambda + \lambda z^\theta \dot{R} R^{\lambda - 1} = \dot{u}$. Pro R^λ, in primo Æquationis Termino, & z^θ in secundo, scribe $R R^{\lambda - 1}$ & $z z^{\theta - 1}$, & fiet $\theta \dot{z} R + \lambda z \dot{R}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} = \dot{u}$. Erat autem $R = e + fz^n + gz^{2n}$
$+ hz$

$+ hz^{3n} +$, *&c.* Et inde, per Prop. I, fit $\dot{R} = \mathrm{n} f \dot{z} z^{\mathrm{n}-1} + 2\mathrm{n} g \dot{z} z^{2\mathrm{n}-1} + 3\mathrm{n} h \dot{z} z^{3\mathrm{n}-1} +$ *&c.*, quibus ſubſtitutis & ſcriptâ *BD* ſeu 1 pro $\dot{z}$, fiet

$$\theta e \; \begin{matrix}+\theta\\ \\ +\lambda\eta\end{matrix} fz^{\mathrm{n}} \; \begin{matrix}+\theta\\ \\ +2\lambda\eta\end{matrix} gz^{2\mathrm{n}} \; \begin{matrix}+\theta\\ \\ +3\lambda\eta\end{matrix} hz^{3\mathrm{n}} \; \begin{matrix}+\&c.\\ \\ +\&c.\end{matrix} \text{ in } z^{\theta-1} \mathrm{R}^{\lambda-1} = u = BC.$$

Q. E. D.

PROPOSITIO IV.

THEOR. II.

Si Curvæ Abſciſſa *AB* ſit z, & ſi pro $e + fz^{\mathrm{n}} + gz^{2\mathrm{n}} +$ *&c.* ſcribatur R, & pro $k + lz^{\mathrm{n}} + mz^{2\mathrm{n}} +$ *&c.* Scribatur S: ſit autem Area Curvæ $z^{\theta} R^{\lambda} S^{\mu}$: erit ordinatim Applicata $BC =$

$$\left.\begin{matrix}
\theta ek \;\; \left.\begin{matrix}\begin{matrix}+\theta\\ +\lambda\mathrm{n}\end{matrix} fk \\ \\ \begin{matrix}+\theta\\ +\mu\mathrm{n}\end{matrix} el\end{matrix}\right\} z^{\mathrm{n}}
\;\; \left.\begin{matrix}\begin{matrix}+\theta\\ +2\lambda\mathrm{n}\end{matrix} gk \\ \begin{matrix}+\theta\\ +\lambda\mathrm{n}\\ +\mu\mathrm{n}\end{matrix} fl \\ \begin{matrix}+\theta\\ +2\mu\mathrm{n}\end{matrix} em\end{matrix}\right\} z^{2\mathrm{n}}
\;\; \left.\begin{matrix} * \\ \begin{matrix}+\theta\\ +2\lambda\mathrm{n}\\ +\mu\mathrm{n}\end{matrix} gl \\ \begin{matrix}+\theta\\ +\lambda\mathrm{n}\\ +2\mu\mathrm{n}\end{matrix} fm\end{matrix}\right\} z^{3\mathrm{n}}
\;\; \begin{matrix} * \\ * \\ \begin{matrix}+\theta\\ +2\lambda\mathrm{n}\\ +2\mu\mathrm{n}\end{matrix} gmz^{4\mathrm{n}}\end{matrix}
\end{matrix}\right\} \text{in } z^{\theta-1} R^{\lambda-1} S^{\mu-1}$$

Demonſtratur ad modum Propoſitionis ſuperioris.

PROPOSITIO V.

Theor. III.

Si Curvæ Abſciſſa AB ſit z, & pro $e+fz^{n}+gz^{2n}+hz^{3n}+\&c.$ ſcribatur R: ſit autem ordinatim Applicata $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$ in $a+bz^{n}+cz^{2n}+dz^{3n}+\&c.$ & ponatur $\frac{\theta}{n}=r$; $r+\lambda=s$; $s+\lambda=t$; $t+\lambda=u$; &c.

erit Area $z^{\theta}R^{\lambda}$ in

$$+\frac{\frac{1}{n}a}{re}$$

$$+\frac{\frac{1}{n}b-sfA}{\overline{r+1}\times e}z^{n}$$

$$+\frac{\frac{1}{n}c-\overline{s+1}\times fB-tgA}{\overline{r+2}\times e}z^{2n}$$

$$+\frac{\frac{1}{n}d-\overline{s+2}\times fC-\overline{t+1}\times gB-uhA}{\overline{r+3}\times e}z^{3n}$$

$$+\frac{-1\,\overline{s+3}\times fD-\overline{t+2}\times gC-\overline{u+1}\times hB}{\overline{r+4}\times e}z^{4n}$$

$+$ &c.

Ubi A, B, C, D, &c. denotant totas Coefficientes datas Terminorum ſingulorum in Serie cum ſignis ſuis $+$, & $-$, nempe

A primi Termini Coefficientem $\quad +\frac{\frac{1}{n}a}{re}$

B ſecundi Termini Coefficientem $\quad +\frac{\frac{1}{n}b-sfA}{\overline{r+1}\times e}$

C tertii Termini Coefficientem $\quad +\frac{\frac{1}{n}c-\overline{s+1}\times fB-tgA}{\overline{r+2}\times e}$

Et ſic deinceps. D E.

DEMONSTRATIO.

Sunto, juxta Propositionem tertiam

CURVARUM ORDINATÆ.

$$\left.\begin{array}{lllllllll}
 & +\theta & & +\theta & & +\theta & & +\&c. \\
1.\ \theta e & & fAz^{n} & & gAz^{2n} & & hAz^{3n} & \\
 & +\lambda e & & +2\lambda n & & +3\lambda n & & +\&c. \\
 & +\theta & & +\theta & & +\theta & & +\&c. \\
2.\ \ldots & & eBz^{n} & +n & fBz^{2n} & +n & gBz^{3n} & +\&c. \\
 & +n & & +\lambda n & & +2\lambda n & & +\&c. \\
 & & & +\theta & & +\theta & & +\&c. \\
3.\ \ldots & & & & eCz^{2n} & +2n & fCz^{3n} & +\&c. \\
 & & & +2n & & +\lambda n & & +\&c. \\
 & & & & & +\theta & & +\&c. \\
4.\ \ldots & & & & & & eDz^{3n} & \\
 & & & & & +3n & & +\&c.
\end{array}\right\}\text{in } z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$$

CURVARUM AREÆ.

1. $Az^{\theta}R^{\lambda}$
2. $Bz^{\theta+n}R^{\lambda}$
3. $Cz^{\theta+2n}R^{\lambda}$
4. $Dz^{\theta+3n}R^{\lambda}$

Et si Summa Ordinatarum ponatur æqualis Ordinatæ $a+bz^{n}+cz^{2n}+dz^{3n}+\&c.$ in $z^{\theta-1}R^{\lambda-1}$, Summa Arearum $z^{\theta}R^{\lambda}$ in $A+Bz^{n}+Cz^{2n}+Dz^{3n}+\&c.$ æqualis erit Areæ Curvæ, cujus ista est Ordinata. Æquentur igitur Ordinatarum Termini correspondentes,

& fiet $a=\theta eA$;

$b=\overline{\theta+\lambda n}\times fA+\overline{\theta+n}\times eB$;

$c=\overline{\theta+2\lambda n}\times gA+\overline{\theta+n+\lambda n}\times fB+\overline{\theta+2n}\times eC$;

&c. &c.

& inde $A = \frac{a}{\theta e}$

$$B = \frac{b - \overline{\theta + \lambda n} \times fA}{\overline{\theta + n} \times e}$$

$$C = \frac{c - \overline{\theta + 2\lambda n} \times gA - \overline{\theta + n + \lambda n} \times fB}{\overline{\theta + 2n} \times e}$$

Et ſic deinceps in infinitum.

Pone jam $\frac{\theta}{n} = r$; $r + \lambda = s$; $s + \lambda = t$ &c. & in Areâ $z^{\theta} R^{\lambda}$ in $A + Bz^{n} + Cz^{2n} + Dz^{3n} +$ &c. ſcribe ipſorum A, B, C, &c. valores inventos, & prodibit Series propoſita. *Q. E. D.*

Et notandum eſt, quòd Ordinata omnis duobus modis in Seriem reſolvitur. Nam Index n vel affirmativus eſſe poteſt, vel negativus.

Proponatur Ordinata $\frac{3k - lzz}{zz\sqrt{kz - lz^{3} + mz^{4}}}$. Hæc vel ſic ſcribi poteſt $z^{-\frac{5}{2}} \times \overline{3k - lzz} \times \overline{k - lzz + mz^{3}}|^{-\frac{1}{2}}$, vel ſic $z \times \overline{-l + 3kz^{-2}} \times \overline{m - lz^{-1} + kz^{-3}}|^{-\frac{1}{2}}$.

In Caſu priore eſt $a = 3k$; $b = 0$; $c = -l$; $e = k$; $f = 0$; $g = -l$; $h = m$; $\lambda = -\frac{1}{2}$; $n = 1$; $\theta - 1 = -\frac{5}{2}$; $\theta = -\frac{3}{2} = r$; $s = -1$; $t = -\frac{1}{2}$; $u = 0$.

In poſteriore eſt $a = -l$; $b = 0$; $c = 3k$; $e = m$; $f = -l$; $g = 0$; $h = 1$; $\lambda = -\frac{1}{2}$; $n = -1$; $\theta - 1 = 1$; $\theta = 2$; $r = -2$; $s = -1\frac{1}{2}$; $t = -1$; $u = -\frac{1}{2}$;

Tentandus eſt caſus uterque. Et, ſi Serierum alterutra ob Terminos tandem deficientes abrumpitur ac terminatur, habebitur Area Curvæ in Terminis finitis. Sic, in Exempli hujus priore Caſu, ſcribendo in Serie valores ipſorum $a, b, c, e, f, g, h, \lambda, \theta, r, s, t, u$, Termini

Termini omnes poſt primum evaneſcunt in infinitum, & Area Curvæ prodit $-2\sqrt{\frac{k - lzz + mz^3}{z^3}}$. Et hæc Area ob ſignum negativum adjacet Abſciſſæ ultra Ordinatam productæ. Nam, Area omnis affirmativa adjacet tam Abſciſſæ quàm Ordinatæ; negativa verò cadit ad contrarias partes Ordinatæ, & adjacet Abſciſſæ productæ, manente ſcilicet ſigno Ordinatæ. Hoc modo Series alterutra, & nonnumquam utraque, ſemper terminatur & finita evadit, ſi Curva geometricè quadrari poteſt. At, ſi Curva talem Quadraturam non admittit, Series utraque continuabitur in infinitum, & earum altera converget & Aream dabit approximando, præterquàm ubi r, (propter Aream infinitam,) vel nihil eſt, vel numerus integer & negativus; vel ubi $\frac{z}{e}$ æqualis eſt Unitati. Si $\frac{z}{e}$ minor eſt Unitate, converget Series, in quâ Index n affirmativus eſt: ſin $\frac{z}{e}$ Unitate major eſt, converget Series altera. In uno Caſu Area adjacet Abſciſſæ ad uſque Ordinatam ductæ, in altero adjacet Abſciſſæ ultra Ordinatam productæ.

Nota inſuper, quòd ſi Ordinata contentum eſt ſub Factore rationali Q, & Factore ſurdo irreducibili R^{π}, & Factoris ſurdi Latus R non dividit Factorem rationalem Q; erit $\lambda - 1 = \pi$; & $R^{\lambda - 1} = R^{\pi}$. Sin Factoris ſurdi Latus R dividit Factorem rationalem ſemel, erit $\lambda - 1 = \pi + 1$, & $R^{\lambda - 1} = R^{\pi + 1}$: ſi dividat bis, erit $\lambda - 1 = \pi + 2$, & $R^{\lambda - 1} = R^{\pi + 2}$: ſi ter, erit $\lambda - 1 = \pi + 3$, & $R^{\lambda - 1} = R^{\pi + 3}$: & ſic deinceps.

Si Ordinata eſt Fractio rationalis irreducibilis cum Denominatore ex duobus vel pluribus Terminis compoſito; reſolvendus eſt Denominator in Diviſores ſuos omnes primos. Et ſi Diviſor ſit aliquis, cui nullus alius eſt æqualis, Curva quadrari nequit; ſin duo vel plures ſint Diviſores æquales, rejiciendus eſt eorum unus; & ſi adhuc alii duo vel plures ſint ſibi mutuò æquales & prioribus inæquales, rejiciendus eſt etiam eo-

 rum

rum unus, & sic in aliis omnibus æqualibus, si adhuc plures sint: deinde Divisor, qui relinquitur, vel contentum sub Divisoribus omnibus, qui relinquuntur, si plures sunt, ponendum est pro R, & ejus Quadrati reciprocum R^{-2} pro $R^{\lambda-1}$, præterquàm ubi contentum illud est Quadratum, vel Cubus, vel Quadrato-Quadratum, &c. quo casu ejus Latus ponendum est pro R, & Potestatis Index 2, vel 3, vel 4, negativè sumptus pro λ. Et Ordinata ad Denominatorem R^2, vel R^3, vel R^4, vel R^5 *&c.* reducenda.

Ut, si Ordinata sit $\frac{z^5+z^4-8z^3}{z^5+z^4-5z^3-zz+8z-4}$, quoniam hæc Fractio irreducibilis est, & Denominatoris Divisores sunt pares, nempe $z-1$, $z-1$, $z-1$, & $z+2$, $z+2$, rejicio Magnitudinis utriusque Divisorem unum, & reliquorum $z-1$, $z-1$, $z+2$, contentum z^3-3z+2 pono pro R, & ejus Quadrati reciprocum $\frac{1}{R^2}$, seu R^{-2}, pro $R^{\lambda-1}$. Dein Ordinatam ad Denominatorem R^2 seu $R^{1-\lambda}$ reduco, & fit $\frac{z^6-9z^4+8z^3}{\overline{z^3-3z+2}|^2}$, id est, $z^3\times\overline{8-9z+z^3}\times\overline{2-3z+z^3}|^{-2}$.
Et inde est $a=8$; $b=-9$; $c=0$; $d=-1$; *&c.* $e=2$; $f=-3$; $g=0$; $h=1$; $\lambda-1=-2$; $\lambda=-1$; $n=1$; $\theta-1=3$; $\theta=4=r$; $s=3$; $t=2$; $u=1$. Et his in Serie scriptis prodit Area $\frac{z^4}{z^3-3z+2}$, Terminis omnibus in totâ Serie post primum evanescentibus.

Si denique Ordinata est Fractio irreducibilis, & ejus Denominator contentum est sub Factore rationali Q, & Factore surdo irreducibili R^{π}, inveniendi sunt Lateris R Divisores omnes primi, & rejiciendus est Divisor unus Magnitudinis cujusque; & per Divisores qui restant, si qui sint, multiplicandus est Factor rationalis Q: & si factum æquale est Lateri R, vel Lateris illius Potestati alicui, cujus Index est numerus integer, esto Index ille m, & erit $\lambda-1=-\pi-m$; & $R^{\lambda-1}=R^{-\pi-m}$.

Ut,

Ut, ſi Ordinata ſit $\frac{3q^5 - q^4 x + 9q^3 xx - qqx^3 - 6qx^4}{qq - xx \times \sqrt[3]{q^3 + qqx - qxx - x^3}}$, quoniam Factoris ſurdi Latus R, ſeu $q^3 + qqx - qxx - x^3$, Diviſores habet $q + x$, $q + x$, $q - x$, qui duarum ſunt Magnitudinum, rejicio Diviſorem unum Magnitudinis utriuſque, & per Diviſorem $q + x$, qui relinquitur, multiplico Factorem rationalem $qq - xx$. Et quoniam Factum $q^3 + qqx - qxx - x^3$ æquale eſt Lateri R, pono $m = 1$, &, inde, cùm π ſit $\frac{1}{3}$, fit $\lambda - 1 = -\frac{4}{3}$. Ordinatam igitur reduco ad Denominatorem $R^{-\frac{4}{3}}$, & fit $x^0 \times \overline{3q^6 + 2q^5 x + 8q^4 xx + 8q^3 x^3 - 7qqx^4 - 6qx^5} \times \overline{q^3 + qqx - qxx - x^3}|^{-\frac{4}{3}}$. Unde eſt $a = 3q^6$; $b = 2q^5$; &c., $e = q^3$; $f = qq$; &c., $\theta - 1 = 0$; $\theta = 1 = n$; $\lambda = -\frac{1}{3}$; $r = 1$; $s = \frac{2}{3}$; $t = \frac{1}{3}$; $u = 0$. Et his in Serie ſcriptis, prodit Area $\frac{3qqx + 3x^3}{\sqrt[3]{q^3 + qqx - qxx - x^3}}$, Terminis omnibus in Serie totâ poſt tertium evaneſcentibus.

PROPOSITIO VI.

Theor. IV.

Si Curvæ Abſciſſa AB ſit z, & ſcribantur R pro $e + fz^n + gz^{2n} + hz^{3n} +$ &c. & S pro $k + lz^n + mz^{2n} + pz^{3n}$ &c. Sit autem ordinatim Applicata $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1} \times S^{\mu - 1}$ in $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n} +$ &c., &, ſi Terminorum $e, f, g, h,$ &c., & $k, l, m, p,$ &c. Rectangula ſint.

$$\begin{matrix} ek & fk & gk & hk; & \&c. \\ el & fl & gl & hl; & \&c. \\ em & fm & gm & hm; & \&c. \\ ep & fp & gp & hp; & \&c. \end{matrix}$$

 Et

Et si Rectangulorum illorum Coefficientes numerales sint respectivè.

$$\frac{1}{n\theta}=r;\ r+\lambda=s;\ s+\lambda=t;\ t+\lambda=u;\ \&c.$$

$$r+\mu=s';\ s+\mu=t';\ t+\mu=u';\ u+\mu=w';\ \&c.$$

$$s'+\mu=t'';\ t'+\mu=u'';\ u'+\mu=w'';\ w'+\mu=x'';\ \&c.$$

$$t''+\mu=u''';\ u''+\mu=w''';\ w''+\mu=x''';\ x''+\mu=y''';\ \&c.$$

Area Curvæ erit hæc:

$$z^{\theta}R^{\lambda}S^{\mu}\text{ in }+\frac{\frac{1}{n}a}{rek}
+\frac{\begin{matrix}\frac{1}{n}b-sfkA\\ -s'el\end{matrix}}{\overline{r+1}\times ek}z^{n}
+\frac{\begin{matrix}-tgkA\\ \frac{1}{n}c-\overline{s+1}\times fkB-t'fl\\ -\overline{s'+1}\times el\ -t''em\end{matrix}}{\overline{r+2}\times ek}z^{2n}
+\frac{\begin{matrix}-vhkA\\ -\overline{t+1}\times gkB-v'gl\\ \frac{1}{n}d-\overline{s+2}\times fkC-\overline{t'+1}\times fl-v''fm\\ -\overline{s'+2}\times el\ -\overline{t''+1}\times em-v'''en\end{matrix}}{\overline{r+3}\times ek}z^{3n}
+\&c.$$

Ubi A denotat Termini primi Coefficientem datum $\frac{\frac{1}{n}a}{rek}$ cum signo suo $+$ vel $-$; B Coefficientem datum secundi; C Coefficientem datum tertii; & sic deinceps. Terminorum verò, a, b, c, *&c.* e, f, g, *&c.* k, l, m, *&c.* unus vel plures deesse possunt. Demonstratur Propositio ad modum præcedentis, & quæ ibi notantur hic:

hîc obtinent. Pergit autem Series talium Propositionum in infinitum, & Progressio Seriei manifesta est.

PROPOSITIO VII.

THEOR. V.

Si pro $e + fz^{n} + gz^{2n} + \&c.$ scribatur R ut supra, & in Curvæ alicujus Ordinatâ $z^{\theta \pm n\sigma} R^{\lambda \pm \tau}$ maneant Quantitates datæ θ, n, λ, e, f, g, &c. & pro σ ac τ scribantur successivè numeri quicunque integri: & si detur Area unius ex Curvis, quæ per Ordinatas innumeras sic prodeuntes designantur, si Ordinatæ sunt duorum nominum in Vinculo Radicis, vel, si dentur Areæ duarum ex Curvis, si Ordinatæ sunt trium nominum in Vinculo Radicis, vel Areæ trium ex Curvis, si Ordinatæ sunt quatuor nominum in Vinculo Radicis, & sic deinceps in infinitum: dico, quòd dabuntur Areæ Curvarum omnium. Pro nominibus hìc habeo Terminos omnes in Vinculo Radicis tam deficientes quàm plenos, quorum Indices Dignitatum sunt in Progressione arithmeticâ. Sic Ordinata $\sqrt{a^{4} - ax^{3} + x^{4}}$ ob Terminos duos inter a^{4} & $-ax^{3}$ deficientes pro Quinquinomio haberi debet. At $\sqrt{a^{4} + x^{4}}$ Binomium est, & $\sqrt{a^{4} + x^{4} - \frac{x^{8}}{a^{4}}}$ Trinomium, cùm Progressio jam per majores differentias procedat. Propositio verò sic demonstratur.

CASUS I.

Sunto Curvarum duarum Ordinatæ $pz^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & $qz^{\theta + n - 1} \times R^{\lambda - 1}$, & Areæ pA, & qB, existente R Quantitate trium nominum $e + fz^{n} + gz^{2n}$.

Et, cùm per Prop. III., sit $z^{\theta} R^{\lambda}$ Area Curvæ, cujus Ordinata est $\theta e \begin{matrix} + \theta \\ + \lambda n \end{matrix} fz^{n} \begin{matrix} + \theta \\ + 2\lambda n \end{matrix} gz^{2n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, subduc Ordi-

 natas

natas & Areas priores de Areâ & Ordinatâ poſteriori, & manebit $\begin{matrix} \theta e + \theta \\ - p + \lambda n \end{matrix} fz^{n} \begin{matrix} + \theta \\ + 2\lambda n \end{matrix} gz^{2n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$. Ordi-
$- qz^{n}$

nata nova Curvæ; & $z^{\theta} R^{\lambda} - pA - qB$ ejuſdem Area. Pone $\theta e = p$; & $\theta f + \lambda n f = q$, & Ordinata evadet $\begin{matrix} \theta \\ + 2\lambda n \end{matrix} gz^{2n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & Area $z^{\theta} R^{\lambda} - \theta e A - \theta f B - \lambda n f B$. Divide utramque per $\theta g + 2\lambda n g$, & Aream prodeuntem dic C, & aſſumptâ utcunque r, erit rC Area Curvæ, cujus Ordinata eſt $rz^{\theta + 2n - 1} R^{\lambda - 1}$. Et, quâ ratione ex Areis pA & qB Aream rC Ordinatæ $rz^{\theta + 2n - 1} R^{\lambda - 1}$ congruentem invenimus, licebit ex Areis qB & rC Aream quartam, puta fD, Ordinatæ $fz^{\theta + 3n - 1} R^{\lambda - 1}$ congruentem invenire, & ſic deinceps in infinitum. Et par eſt ratio Progreſſionis ab Areis B & A in partem contrariam pergentis. Si Terminorum θ, $\theta + \lambda n$, & $\theta + 2\lambda n$ aliquis deficit & Seriem abrumpit, aſſumatur Area pA in principio Progreſſionis unius, & Area qB in principio alterius, & ex his duabus Areis dabuntur Areæ omnes in Progreſſione utrâque. Et contra, ex aliis duabus Areis aſſumptis fit regreſſus per Analyſin ad Areas A & B, adeò ut ex duabus datis ceteræ omnes dentur. *Q. E. O.*

Hic eſt caſus Curvarum, ubi ipſius z Index θ augetur vel diminuitur perpetuâ Additione vel Subductione Quantitatis n. Caſus alter eſt Curvarum ubi Index λ augetur vel diminuitur Unitatibus.

CASUS II.

Ordinatæ $pz^{\theta - 1} R^{\lambda}$ & $qz^{\theta + n - 1} R^{\lambda}$, quibus Areæ pA & qB jam reſpondeant, ſi in R, ſeu $e + fz^{n} + gz^{2n}$, ducantur, ac deinde ad R viciſſim applicentur, evadunt $pe + pfz^{n} + pgz^{2n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$, & $qez^{n} + qfz^{2n} + qgz^{3n}$ in $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$. Et, per Prop. III., eſt $az^{\theta} R^{\lambda}$ Area Curvæ, cujus Ordinata eſt

θ *ae*

$\theta ae \begin{array}{c}+\theta\\+\lambda n\end{array} afz^{n} \begin{array}{c}+\theta\\+2\lambda n\end{array} agz^{2n}$ in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$, & $bz^{\theta+n} R^{\lambda}$. Area Curvæ, cujus Ordinata est $\begin{array}{c}+\theta\\+n\end{array} bez^{n}$, $\begin{array}{c}+\theta\\+n\\+\lambda n\end{array} bfz^{2n} \begin{array}{c}+\theta\\+n\\+2\lambda n\end{array} bgz^{3n}$ in $z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$. Et harum quatuor Arearum Summa est $pA + qB + az^{\theta} R^{\lambda} + bz^{\theta+n} R^{\lambda}$, & Summa respondentium Ordinatarum,

$$\left.\begin{array}{l} \theta ae \\ \\ pe \end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \begin{array}{c}+\theta\\+\lambda n\end{array} af \\ \begin{array}{c}+\theta\\+n\end{array} be \\ +\ pf \\ +\ qe \end{array}\right\} z^{n} \left.\begin{array}{l} \begin{array}{c}+\theta\\+2\lambda n\end{array} ag \\ \begin{array}{c}+\theta\\+n\\+\lambda n\end{array} bf \\ +\ pg \\ +\ qf \end{array}\right\} z^{2n} + \left.\begin{array}{l} \begin{array}{c}+\theta\\+n\\+2\lambda n\end{array} bg \\ qg \end{array}\right\} z^{3n} \text{ in } z^{\theta-1} R^{\lambda-1}$$

Si Terminus primus, tertius, & quartus ponantur seorsim æquales nihilo, per primum fiet $\theta ae + pe = 0$, seu $-\theta a = p$, per quartum $-\theta b - nb - 2\lambda nb = q$, & per tertium (eliminando p & q) $\frac{2ag}{f} = b$. Unde secundus fit $\frac{\lambda naff - 4\lambda nage}{f}$; adeòque Summa quatuor Ordinatarum est $\frac{\lambda naff - 4\lambda nage}{f} z^{\theta+n-1} R^{\lambda-1}$, & Summa totidem respondentium Arearum est $az^{\theta} R^{\lambda} + \frac{2ag}{f} z^{\theta+n} R^{\lambda} - \theta aA - \frac{2\theta+2n+4\lambda n}{f} agB$. Dividantur hæ Summæ per $\frac{\lambda naff + 4\lambda nage}{f}$, & si Quotum posterius dicatur D, erit D Area Curvæ, cujus Ordinata est Quotum prius $z^{\theta+n-1} \times R^{\lambda-1}$. Et, eâdem ratione, ponendo omnes Ordinatæ Terminos, præter primum, æquales nihilo, potest Area Curvæ

Curvæ inveniri, cujus Ordinata eſt $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 1}$. Dicatur Area iſta C; & quâ ratione ex Areis A & B inventæ ſunt Areæ C ac D; ex his Areis C ac D inveniri poſſunt aliæ duæ E & F Ordinatis $z^{\theta - 1} R^{\lambda - 2}$ & $z^{\theta + n - 1} R^{\lambda - 2}$ congruentes, & ſic deinceps in infinitum. Et, per Analyſin contrariam, regredi licet ab Areis E & F ad Areas C ac D, & inde ad Areas A & B, aliáſque, quæ in Progreſſione ſequuntur. Igitur ſi Index λ perpetuâ Unitatum Additione vel Subductione augeatur vel minuatur, & ex Areis, quæ Ordinatis ſic prodeuntibus reſpondent, duæ ſimpliciſſimæ habeantur, dantur aliæ omnes in infinitum. *Q. E. O.*

CASUS III.

Et per Caſus hoſce duos conjunctos, ſi tam Index θ perpetuâ Additione vel Subductione ipſius n, quàm Index λ perpetuâ Additione vel Subductione Unitatis, utcunque augeatur vel minuatur, dabuntur Areæ ſingulis prodeuntibus Ordinatis reſpondentes. *Q. E. O.*

CASUS IV.

Et ſimili argumento, ſi Ordinata conſtat ex quatuor nominibus in Vinculo Radicali, & dantur tres Arearum; vel ſi conſtat ex quinque nominibus, & dantur quatuor Arearum, & ſic deinceps: dabuntur Areæ omnes, quæ addendo vel ſubducendo numerum n Indici θ, vel Unitatem Indici λ generari poſſunt. Et par eſt ratio Curvarum, ubi Ordinatæ ex Binomiis conflantur, & Area una earum, quæ non ſunt geometricè quadrabiles, datur. *Q. E. O.*

PROPOSITIO VIII.

THEOR. VI.

Si pro $e + fz^{n} + gz^{2n} + \&c.$, & $k + lz^{n} + mz^{2n} + \&c.$ ſcribantur R & S ut ſupra, & in Curvæ alicujus Ordinatâ $z^{\theta \pm n\tau} \times R^{\lambda \pm \tau}$

$R^{\lambda \pm \tau} S^{\mu \pm \upsilon}$ maneant Quantitates datæ θ, n, λ, μ, e, f, g, k, l, m, *&c.* Et pro σ, τ, & υ, ſcribantur ſucceſſivè numeri quicunque integri: & ſi dentur Areæ duarum ex Curvis, quæ per Ordinatas ſic prodeuntes deſignantur, ſi Quantitates R & S ſunt Binomia; vel ſi dentur Areæ trium ex Curvis, ſi R & S conjunctim ex quinque nominibus conſtant; vel Areæ quatuor ex Curvis, ſi R & S conjunctim ex ſex nominibus conſtant; & ſic deinceps in infinitum: dico quòd dabuntur Areæ Curvarum omnium.

Demonſtratur ad modum Propoſitionis ſuperioris.

PROPOSITIO IX.

Theor. VII.

Æquantur Curvarum Areæ inter ſe, quarum Ordinatæ ſunt reciprocè ut Fluxiones Abſciſſarum.

Nam, contenta ſub Ordinatis & Fluxionibus Abſciſſarum erunt æqualia, & Fluxiones Arearum ſunt ut hæc contenta.

Coroll. I.

Si aſſumatur Relatio quævis inter Abſciſſas duarum Curvarum, & inde, per Prop. I., quæratur Relatio Fluxionum Abſciſſarum, & ponantur Ordinatæ reciprocè proportionales Fluxionibus, inveniri poſſunt innumeræ Curvæ, quarum Areæ ſibi mutuò æquales erunt.

Coroll. II.

Sic enim Curva omnis, cujus hæc eſt Ordinata $z^{\theta - 1}$ in $\overline{e + fz^{n} + gz^{2n} + \&c.}|^{\lambda}$ aſſumendo Quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu} = s$, & $z^{s} = x$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $\frac{\nu}{n} x^{\frac{\nu\theta - n}{n}}$ in $\overline{e + fx^{\nu} + gx^{2\nu} + \&c.}|^{\lambda}$

COROLL. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata est $z^{\theta-1}$ in $\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}$ assumendo Quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu}=s$; & $z^{s}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{\nu}{n}x^{\frac{\nu\theta-n}{n}}$ in $\overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}$

COROLL. IV.

Et Curva omnis, cujus Ordinata est $z^{\theta-1}$ in $\overline{a+bz^{n}+cz^{2n}+\&c.}\times\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.}|^{\mu}$, Assumendo Quantitatem quamvis pro ν, & ponendo $\frac{n}{\nu}=s$, & $z^{s}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{\nu}{n}x^{\frac{\nu\theta-n}{n}}$ in $\overline{a+bx^{\nu}+cx^{2\nu}+\&c.}\times\overline{e+fx^{\nu}+gx^{2\nu}+\&c.}|^{\lambda}\times\overline{k+lx^{\nu}+mx^{2\nu}+\&c.}|^{\mu}$

COROLL. V.

Et Curva omnis, cujus Ordinata est $z^{\theta-1}$ in $\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}$ Ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $x^{\overline{\theta+1}}\times\overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}|^{\lambda}$, id est, $x^{\overline{\theta+1+n\lambda}}\times\overline{f+ex^{n}}|^{\lambda}$, si duo sunt nomina in Vinculo Radicis, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda}}\times\overline{g+fx^{n}+ex^{2n}}|^{\lambda}$, si tria sunt nomina; & sic deinceps.

COROLL.

COROLL. VI.

Et Curva omnis, cujus Ordinata est $z^{\theta-1}$ in $\overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda}$ $\times\ \overline{k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.}|^{\mu}$, ponendo $\frac{1}{z}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{1}{x^{\theta+1}}\times\overline{e+fx^{-n}+gx^{-2n}+\&c.}|^{\lambda}$ $\times\overline{k+lx^{-n}+mx^{-2n}+\&c.}|^{\mu}$, id est, $\frac{1}{x^{\theta+1+n\lambda+n\mu}}$ $\times\ \overline{f+ex^{n}}|^{\lambda}\times\overline{l+kx^{n}}|^{\mu}$, si bina sunt nomina in Vinculis Radicum, vel $\frac{1}{x^{\theta+1+2n\lambda+n\mu}}\times\overline{g+fx^{n}+ex^{2n}}|^{\lambda}\times\overline{l+kx^{n}}|^{\mu}$; si tria sunt nomina in Vinculo Radicis prioris, ac duo in Vinculo posterioris; & sic in aliis.

Et nota, quòd Areæ duæ æquales in novissimis hisce duobus Corollariis jacent ad contrarias partes Ordinatarum. Si Area in alterutrâ Curvâ adjacet Abscissæ, Area huic æqualis in alterâ Curvâ adjacet Abscissæ productæ.

COROLL. VII.

Si Relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abscissam z definiatur per Æquationem quamvis affectam hujus formæ, y^{α} in e $+fy^{n}z^{\delta}+gy^{2n}z^{2\delta}+hy^{3n}z^{3\delta}+\&c.=z^{\beta}$ in $k+ly^{n}z^{\delta}$ $+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.$, hæc Figura, assumendo $s=\frac{n-\delta}{n}$, $x=\frac{1}{s}z^{s}$, & $\lambda=\frac{n-\delta}{\alpha\delta+\beta n}$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Abscissa x, ex datâ Ordinatâ u, determinatur per Æquationem non affectam $\frac{1}{s}u^{\alpha\lambda}\times\overline{e+fu^{n}+gu^{2n}+hu^{3n}+\&c.}|^{\lambda}\times$ $\overline{k+lu^{n}+mu^{2n}+\&c.}|^{-\lambda}=x$.

Coroll. VIII.

Si Relatio inter Curvæ alicujus Ordinatam y & Abſciſſam z, definitur per Æquationem quamvis affectam hujus formæ y^{α} in $\overline{e+fy^{n}z^{\delta}+gy^{2n}z^{2\delta}+\&c.} = z^{\beta}$ in $\overline{k+ly^{n}z^{\delta}+my^{2n}z^{2\delta}+\&c.} + z^{\gamma}$ in $\overline{p+qy^{n}z^{\delta}+ry^{2n}z^{2\delta}+\&c.}$ hæc Figura, aſſumendo $f = \frac{n-\delta}{n}$, $x = \frac{1}{f} z^{f}$, $\mu = \frac{\alpha\delta+\beta n}{n-\delta}$, & $\nu = \frac{\alpha\delta+\gamma n}{n-\delta}$, migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Abſciſſa x ex datâ Ordinata u, determinatur per Æquationem minùs affectam u^{α} in $\overline{e+fu^{n}+gu^{2n}+\&c.} = f^{\mu}x^{\mu}$ in $\overline{k+lu^{n}+mu^{2n}+\&c.} + f^{\nu}x^{\nu}$ in $\overline{p+qu^{n}+ru^{2n}+\&c.}$

Coroll. IX.

Curva omnis, cujus Ordinata eſt $\pi z^{\theta-1}$ in $\nu e \begin{smallmatrix}+\nu\\+n\end{smallmatrix} fz^{n} \begin{smallmatrix}+\nu\\+2n\end{smallmatrix} gz^{2n} + \&c. \times \overline{e+fz^{n}+gz^{2n}+\&c.}|^{\lambda-1} \times \overline{a+b\times\overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+n}+gz^{\nu+2n}+\&c.}|^{\tau}}|^{\alpha}$ ſi ſit $\theta = \nu\lambda$, & aſſumantur $x = \overline{ez^{\nu}+fz^{\nu+n}+gz^{\nu+2n}+\&c.}|^{\pi}$, $\sigma = \frac{\tau}{\pi}$, & $\vartheta = \frac{\lambda-\pi}{\omega}$ migrat in aliam ſibi æqualem, cujus Ordinata eſt $x^{\vartheta} \times \overline{a+bx^{\sigma}}|^{\omega}$.

Et nota, quòd Ordinata prior in hoc Corollario evadit ſimplicior ponendo $\lambda = 1$, vel ponendo $\tau = 1$, & efficiendo, ut Radix Dignitatis extrahi poſſit cujus Index eſt ω, vel etiam ponendo $\omega = -1$, & $\lambda = 1 = \tau = \alpha = \pi$, ut alios Caſus prætercam.

COROLL. X.

Pro $ez^{\nu}+fz^{\nu+n}+gz^{\nu+2n}+\&c.$ $\nu ez^{\nu-1}\begin{smallmatrix}+\nu\\+n\end{smallmatrix}fz^{\nu+n-1}\begin{smallmatrix}+\nu\\+2n\end{smallmatrix}gz^{\nu+2n-1}+\&c.$ $k+lz^{n}+mz^{2n}+\&c.$ & $nlz^{n-1}+2nmz^{2n-1}+\&c.$ scribantur R, $\dot{r}$, S & $\dot{s}$ respectivè, & Curva omnis, cujus Ordinata est $\pi S\dot{r}+\phi R\dot{s}$ in $R^{\lambda-1}S^{\mu-1}\times\overline{aS^{\sigma}+bR^{\tau}}^{\omega}$, si fit $\frac{\mu-\nu\omega}{\lambda}=\frac{\upsilon}{\tau}=\frac{\phi}{\pi}$, $\frac{\tau}{\pi}=\sigma$, $\frac{\lambda-\pi}{\pi}=\vartheta$, & $R^{\pi}S^{\phi}=x$, migrat in aliam sibi æqualem, cujus Ordinata est $x^{\vartheta}\times\overline{a+bx^{\sigma}}^{\omega}$.

Et nota, quòd Ordinata prior evadit simplicior, ponendo Unitates pro τ, υ, & λ, vel μ, & faciendo ut Radix Dignitatis extrahi possit cujus Index est ω, vel ponendo $\omega=-1$, vel $\mu=0$.

PROPOSITIO X.

PROBL. III.

Invenire Figuras simplicissimas, cum quibus Curva quævis geometricè comparari potest, cujus ordinatim Applicata y per Æquationem non affectam ex datâ Abscissâ z determinatur.

CASUS I.

Sit Ordinata $az^{\theta-1}$, & Area erit $\frac{1}{\theta}az^{\theta}$, ut ex Propos. V, ponendo $b=c=e=d=f=g=h$, & $e=1$, facilè colligitur.

CASUS II.

Sit Ordinata $a z^{\theta - 1} \times \overline{e + f z^{n} + g z^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1}$ Et, si Curva cum Figuris rectilineis geometricè comparari potest, quadrabitur per Prop. V. ponendo $b = o = c = d$. Sin minùs convertetur in aliam Curvam sibi æqualem, cujus Ordinata est $\frac{a}{n}$ $x^{\frac{\theta - n}{n}} \times \overline{e + f x + g x x + \&c.}|^{\lambda - 1}$ per Corol. II. Prop. IX. Deinde, si de Dignitatum Indicibus $\frac{\theta - n}{n}$, & $\lambda - 1$, per Prop. VII., rejiciantur Unitates, donec Dignitates illæ fiant quàm-minimæ, devenietur ad Figuras simplicissimas, quæ hac ratione colligi possunt. Dein harum unaquæque, per Corol. V. Prop. IX. dat aliam, quæ nonnunquam simplicior est. Et ex his per Prop. III. & Coroll. IX. & X. Prop. IX. inter se collatis, Figuræ adhuc simpliciores quandoque prodeunt. Denique ex Figuris simplicissimis assumptis facto regressu computabitur Area quæsita.

CASUS III.

Sit Ordinata $z^{\theta - 1} \times \overline{a + b z^{n} + c z^{2n} + \&c.} \times \overline{e + f z^{n} + g z^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1}$, & hæc Figura, si quadrari potest, quadrabitur per Prop. V. Sin minus, distinguenda est Ordinata in partes $z^{\theta - 1} \times a \times \overline{e + f z^{n} + g z^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1}$, $z^{\theta - 1} \times b z^{n} \times \overline{e + f z^{n} + g z^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1}$, &c. &, per Cas. II. inveniendæ sunt Figuræ simplicissimæ, cum quibus Figuræ partibus illis respondentes comparari possunt. Nam, Areæ Figurarum partibus illis respondentium sub signis suis + & — conjunctæ component Aream totam quæsitam.

CASUS

CASUS IV.

Sit Ordinata $z^{\theta - 1} \times \overline{a + bz^{n} + cz^{2n} + \&c.}\times \overline{e + fz^{n} + gz^{2n} + \&c.}|^{\lambda - 1} \times \overline{k + lz^{n} + mz^{2n} + \&c.}|^{\mu - 1}$: &, si Curva quadrari potest, quadrabitur per Prop. V I. Sin minus, convertetur in simpliciorem, per Corol. I V. Prop. I X. ac deinde comparabitur cum Figuris simplicissimis, per Prop. VIII. & Corol. VI, IX, & X Prop. IX., ut fit in Casu II, & III.

CASUS V.

Si Ordinata ex variis partibus constat, partes singulæ pro Ordinatis Curvarum totidem habendæ sunt, & Curvæ illæ, quotquot quadrari possunt, sigillatim quadrandæ sunt, earúmque Ordinatæ de Ordinatâ totâ demendæ. Dein Curva, quam Ordinatæ pars residua designat seorsim, (ut in Casu II, III, & IV.) cum Figuris simplicissimis comparanda est, cum quibus comparari potest. Et Summa Arearum omnium pro Areâ Curvæ propositæ habenda est.

COROLL. I.

Hinc etiam Curva omnis, cujus Ordinata est Radix quadratica affecta Æquationis suæ, cum Figuris simplicissimis, seu rectilineis, seu curvilineis, comparari potest. Nam, Radix illa ex duabus partibus semper constat, quæ, seorsim spectatæ, non sunt Æquationum Radices affectæ. Proponatur Æquatio $aayy + zzyy = 2a^{3}y + 2z^{3}y - z^{4}$, & extracta Radix erit $y = \frac{a^{3} + z^{3} + a\sqrt{a^{4} + 2az^{3} - z^{4}}}{aa + zz}$, cujus pars rationalis $\frac{a^{3} + z^{3}}{aa + zz}$, & pars irrationalis $\frac{a\sqrt{a^{4} + 2az^{3} - z^{4}}}{aa + zz}$ sunt Ordinatæ Curvarum, quæ per hanc Propositionem vel quadrari possunt, vel cum Figuris simplicissimis comparari, cum quibus collationem geometricam admittunt.

Coroll. II.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per Æquationem quamvis affectam definitur, quæ, per Corol. VII. Prop. IX., in Æquationem non affectam migrat, vel quadratur per hanc Propositionem, si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis, cum quibus comparari potest. Et hac ratione Curva omnis quadratur, cujus Æquatio est trium Terminorum. Nam Æquatio illa, si affecta sit, transmutatur in non affectam, per Corol. VII. Prop. IX., ac deinde per Corol. II., & V. Prop. IX., in simplicissimam migrando, dat vel Quadraturam Figuræ, si quadrari potest, vel Curvam simplicissimam, quâ cum comparatur.

Coroll. III.

Et Curva omnis, cujus Ordinata per Æquationem quamvis affectam definitur, quæ per Corol. VIII. Prop. IX. in Æquationem quadraticam affectam migrat, vel quadratur per hanc Propositionem, & hujus Corol. I., si quadrari potest, vel comparatur cum Figuris simplicissimis, cum quibus collationem geometricam admittit.

SCHOLIUM.

Ubi quadrandæ sunt Figuræ, ad Regulas hasce generales semper recurrere nimis molestum esset: præstat Figuras, quæ simpliciores sunt & magis usui esse possunt, semel quadrare, & Quadraturas in Tabulam referre; deinde Tabulam consulere, quoties ejusmodi Curvam aliquam quadrare oportet. Hujus autem generis sunt Tabulæ duæ sequentes, in quibus z denotat Abscissam, y Ordinatam rectangulam, & t Aream Curvæ quadrandæ, & d, e, f, g, h, n, sunt Quantitates datæ cum signis suis $+$ & $-$.

TABULA

TABULA

Curvarum ſimpliciorum, quæ quadrari poſſunt.

	Curvarum Formæ.	Curvarum Areæ.
	Forma prima. $dz^{n-1}=y$	$\frac{d}{n}z^{n}=t$
	Forma ſecunda. $\frac{dz^{n-1}}{ee+2efz^{n}+ffz^{2n}}=y$	$\frac{dz^{n}}{nee+nefz^{n}}=t$, vel $\frac{-d}{nef+nffz^{n}}=t.$
	Forma tertia.	
1	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{2d}{3nf}R^{3}=t$, exiſtente $R=\sqrt{e+f^{n}}$
2	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{-4e+6fz^{n}}{15nff}dR^{3}=t$
3	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{16ee-24efz^{n}+30ffz^{2n}}{105nf^{3}}dR^{3}=t$
4	$dz^{4n-1}\sqrt{e+fz^{n}}=y$	$\frac{-96e^{3}+144eefz^{n}-180effz^{2n}+210f^{3}z^{3n}}{945nf^{4}}dR^{3}=t$
	Forma quarta.	
1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{2d}{nf}R=t$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{-4e+2fz^{n}}{3nff}dR=t$
3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{16ee-8efz^{n}+6ffz^{2n}}{15nf^{3}}dR=t$
4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}}}=y$	$\frac{-96e^{3}+48eefz^{n}-36effz^{2n}+30f^{3}z^{3n}}{105nf^{4}}dR=t$

TABULA

Curvarum ſimpliciorum quæ cum Ellipſi & Hyperbola comparari poſſunt.

Sit jam (*Fig.* 4. 5. 6. 7.) αGD, vel PGD, vel GDS, Sectio conica, cujus Area ad Quadraturam Curvæ propoſitæ requiritur, ſitque ejus Centrum A; Axis Ka; Vertex a; Semiaxis conjugatus AP; datum Abſciſſæ principium A, vel a, vel α; Abſciſſa AB, vel aB, vel $\alpha B = x$; Ordinata rectangula $BD = u$; & Area $ABDP$, vel $aBDG$, vel $\alpha BDG = s$; exiſtente αG Ordinatâ ad Punctum α. Jungantur KD, AD, aD. Ducatur Tangens DT occurrens Abſciſſæ AB in T, & compleatur Parallelogrammum $ABDO$. Et, ſi quando ad Quadraturam Curvæ propoſitæ requiruntur Areæ duarum Sectionum conicarum, dicatur poſterioris Abſciſſa ξ, Ordinata Υ, & Area σ. Sit autem $\div$ differentia duarum Quantitatum, ubi incertum eſt utrum poſterior de priori, an prior de poſteriori ſubduci debeat.

CURVARUM FORMÆ.		SECTIONIS CONICÆ.		CURVARUM AREÆ.
	Forma prima.	*Abſciſſa.*	*Ordinata.*	
FIG. 5. 1	$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$z^{n}=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{1}{n}s=t=\frac{\alpha GDB}{n}$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$z^{n}=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{d}{nf}z^{n}-\frac{e}{nf}s=t$
3	$\frac{dz^{3n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$z^{n}=x$	$\frac{d}{e+fx}=u$	$\frac{d}{2nf}z^{2n}-\frac{de}{nff}z^{n}+\frac{ee}{nff}s=t$
	Forma ſecunda.			
FIG. 6. 1 7.	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2xu\div 4s}{n}=t=\frac{4}{n}ADGa$
2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2de}{nf}z^{\frac{n}{2}}+\frac{4es-2exu}{nf}=t$
3	$\frac{dz^{\frac{5}{2}n-1}}{e+fz^{n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^{n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{f}-\frac{e}{f}xx}=u$	$\frac{2de}{3nf}z^{\frac{3n}{2}}-\frac{2dee}{nff}z^{\frac{n}{2}}+\frac{2eexu-4ees}{nff}=t$

Forma tertia

	Forma tertia.			
FIG. 5. 1 6. 7.	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n}=y$	$\frac{1}{z^n}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{4de}{nf}$ in $\frac{V^3}{2ex}-s=t=\frac{4de}{nf}$ in $aGDT$, vel in $APDB \div TDB$
	Vel sic	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{8dee}{nff}$ in $s-\frac{1}{2}xu-\frac{fu}{4e}+\frac{ffu}{4eex}=t=\frac{8dee}{nff}$ in $aGDA+\frac{ffu}{4eex}$
2	$\frac{d}{z^{n+1}}\sqrt{e+fz^n}=y$	$\frac{1}{z^n}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$-\frac{2d}{n}s=t=\frac{2d}{n}APDB$, seu $\frac{2d}{n}aGDB$
	Vel sic	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{4de}{nf}$ in $s-\frac{1}{2}xu-\frac{fu}{2e}=t=\frac{4de}{nf}\times aGDK$
3	$\frac{d}{z^{2n+1}}\sqrt{e+fz^n}=y$	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$-\frac{d}{n}s=t=\frac{d}{n}\times -aGDB$, vel $BDPK$
4	$\frac{d}{z^{3n+1}}\sqrt{e+fz^n}=y$	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{3dfs-2du^3}{6ne}=t$
	Forma quarta.			
FIG. 5. 1	$\frac{d}{z\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{1}{z^n}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{4d}{nf}$ in $\frac{1}{2}xu \div s=t=\frac{4d}{nf}$ in PAD, vel in $aGDA$
	Vel sic	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{8de}{nff}$ in $s-\frac{1}{2}xu-\frac{fu}{4e}=t=\frac{8de}{nff}$ in $aGDA$
2	$\frac{d}{z^{n+1}\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{1}{z^n}=xx$	$\sqrt{f+exx}=u$	$\frac{2d}{ne}$ in $s-xu=t=\frac{2d}{ne}$ in POD, vel in $AODGa$
	Vel sic	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{4d}{nf}$ in $\frac{1}{2}xu \div s=t=\frac{4d}{nf}$ in $aDGa$

3	$\frac{d}{z^{2n+1}\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{d}{ne}$ in $3s \div 2xu = t = \frac{d}{ne}$ in $3aDGa \div \Delta aDB$
4	$\frac{d}{z^{3n+1}\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\frac{1}{z^n}=x$	$\sqrt{fx+exx}=u$	$\frac{10dfxu-15dfs-2dexxu}{6nee}=t$
	Forma quinta.			
1	$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{ff-4eg}{4gg}xx}=u$	$\frac{xu-2s}{n}=t$
	Vel sic	$\sqrt{\frac{dz^{2n}}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x$	$\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{ff-4eg}{4ee}xx}=u$	$\frac{2s-xu}{n}=t$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{e+fz^n+gz^{2n}}}=x$ $fz^n+gz^{2n}=\xi$	$\sqrt{\frac{d}{g}+\frac{ff-4eg}{4gg}xx}=u$ $\frac{1}{e+\xi}=\Upsilon$	$\frac{d\sigma+2fs-fxu}{2ng}=t$
	Forma sexta, ubi scribitur p. pro $\sqrt{ff+4eg}$.			
1	$\frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\sqrt{\frac{2dg}{f-p+2gz^n}}=x$ $\sqrt{\frac{2dg}{f+p+2gz^n}}=\xi$	$\sqrt{d+\frac{-f+p}{2g}xx}=u$ $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2g}\xi\xi}=\Upsilon$	$\frac{2xu-4s-2\xi\Upsilon+4\sigma}{np}=t$
2	$\frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^n+gz^{2n}}=y$	$\sqrt{\frac{2dez^n}{fz^n-pz^n+2e}}=x$ $\sqrt{\frac{2dez^n}{fz^n+pz^n+2e}}=\xi$	$\sqrt{d+\frac{-f-p}{2e}xx}=u$ $\sqrt{d+\frac{-f-p}{2e}\xi\xi}=\Upsilon$	$\frac{4s-2xu-4\sigma+2\xi\Upsilon}{np}=t$

	Forma ſeptima			
FIG. 5. 6. 1	$\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=y$	$\left\{\begin{array}{l} z^{n}=x \\ \frac{1}{z^{n}}=\xi \end{array}\right.$	$\left.\begin{array}{l}\sqrt{e+fx+gxx}=u \\ \sqrt{g+f\xi+e\xi\xi}=\Upsilon\end{array}\right\}$	$\frac{4dee\xi\Upsilon+2def\Upsilon-2dffu-8dee\sigma+4dfgs}{4neg-nff}=t$
2	$dz^{n-1}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{d}{n}s=t=\frac{d}{n}$ in αGDB
3	$dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{d}{3ng}u^{3}-\frac{df}{2ng}s=t$
4	$dz^{3n-1}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{6dgx-5df}{24ngg}u^{3}+\frac{5dff-4deg}{16ngg}s=t$
	Forma octava.			
FIG. 5. 1	$\frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{8dgs-4dgxu-2dfu}{4neg-nff}=t=\frac{8dg}{4neg-nff}$ in $\alpha GDB\pm\Delta DBA$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{-4dfs+2dfxu+4deu}{4neg-nff}=t$
3	$\frac{dz^{3n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{\begin{array}{l}3dff \\ -4deg\end{array}s\begin{array}{l}-2dff \\ +4deg\end{array}xu-2defu}{4negg-nffg}=t$
4	$\frac{dz^{4n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}}=y$	$z^{n}=x$	$\sqrt{e+fx+gxx}=u$	$\frac{\begin{array}{l}36defg \\ -15deff\end{array}s\begin{array}{l}+8degg \\ -2dffg\end{array}xxu\begin{array}{l}-28defg \\ +10deff\end{array}xu\begin{array}{l}+10deeg \\ -16deef\end{array}u}{24neg^{3}-6nffg}=t$

	Forma nona.			
1	$\frac{dz^{n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}xx}=u$	$\frac{\substack{4fg\\-4eh}s\substack{-2fg\\+2eh}xu+\frac{2dfu}{x}}{nfh}=t$
2	$\frac{dz^{2n-1}\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}xx}=u$	$\frac{\substack{4egh\\-4fgg}s\substack{-2egh\\+2fgg}xu+\frac{2}{3}dh\frac{u^3}{x^3}-2dfg\frac{u}{x}}{nfhh}=t$
	Forma decima.			
Fig. 5. 1 6.	$\frac{dz^{n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}xx}=u$	$\frac{2xu-4s}{nf}=t=\frac{4}{nf}ADGa$
2	$\frac{dz^{2n-1}}{g+hz^n\sqrt{e+fz^n}}=y$	$\sqrt{\frac{d}{g+hz^n}}=x$	$\sqrt{\frac{df}{h}+\frac{eh-fg}{h}xx}=u$	$\frac{2gs-2gxu+\frac{2du}{x}}{nfh}=t$
	Forma undecima.			
1	$dz^{-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}=y$	$\sqrt{g+hz^n}=x$ $\sqrt{h+gz^{-n}}=\xi$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}xx}=u$ $\sqrt{\frac{fg-eh}{g}+\frac{e}{g}\xi\xi}=\tau$	$\frac{dxu^3z^{-n}-4dfs-4de\sigma}{nfg-neh}=t$
2	$dz^{n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}=y$	$\sqrt{g+hz^n}=x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}xx}=u$	$\frac{2d}{nh}s=t$
3	$dz^{2n-1}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}}=y$	$\sqrt{g+hz^n}=x$	$\sqrt{\frac{eh-fg}{h}+\frac{f}{h}xx}=u$	$\frac{dhxu^3\substack{-3dfg\\-deh}s}{2nfhh}=t$

In Tabulis hiſce, Series Curvarum cujuſque Formæ utrinque in infinitum continuari poteſt, Scilicet in Tabulâ primâ, in Numeratoribus Arearum Formæ tertiæ & quartæ, Numeri coefficientes initialium Terminorum (2, -4, 16, -96, 768, &c.) generantur multiplicando Numeros -2, -4, -6, -8, *&c.* in ſe continuò, & ſubſequentium Terminorum Coefficientes ex initialibus derivantur multiplicando ipſos gradatim, in Formâ quidem tertiâ, per $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{4}$, $-\frac{7}{6}$, $-\frac{9}{8}$, $-\frac{11}{10}$, *&c.*, in quartâ verò per $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{6}$, $-\frac{7}{8}$, $-\frac{9}{10}$, *&c.* Et Denominatorum Coefficientes 3, 15, 105, *&c.* prodeunt multiplicando Numeros 1, 3, 5, 7, 9, *&c.* in ſe continuò.

In ſecundâ verò Tabulâ, Series Curvarum Formæ primæ, ſecundæ, quintæ, ſextæ, nonæ, & decimæ ope ſolius Diviſionis, & Formæ reliquæ ope Propoſitionis tertiæ, & quartæ, utrinque producuntur in infinitum.

Quin-etiam hæ Series mutando ſignum numeri n variari ſolent. Sic enim *ex. gr.* Curva $\frac{d}{z}\sqrt{e+fz^n}=y$, evadit $\frac{d}{z^{\frac{1}{2}n+1}}\sqrt{f+ez^n}$.

PROPOSITIO XL

THEOR. VIII.

TAB. I. Sit (*Fig.* 8.) $ADIC$ Curva quævis Abſciſſam habens $AB=z$, & Ordinatam $BD=y$; & ſit $AEKC$ Curva alia, cujus Ordinata BE æqualis eſt prioris Areæ ADB ad Unitatem applicatæ; & $AFLC$ Curva tertia, cujus Ordinata BF æqualis eſt ſecundæ Areæ AEB ad Unitatem applicatæ; & $AGMC$ Curva quarta, cujus Ordinata BG æqualis eſt tertiæ Areæ AFB ad Unitatem applicatæ; & $AHNC$ Curva quinta, cujus Ordinata BH æqualis eſt quartæ Areæ AGB ad Unitatem applicatæ; & ſic deinceps in infinitum. Et ſunto A, B, C, D, E, *&c.* Areæ Curvarum Ordinatas

natas habentium y, zy, z^2y, z^3y, z^4y, & Abſciſſam communem z.

Detur Abſciſſa quævis $AC = t$, ſitque $BC = t - z = x$, & ſunto P, Q, R, S, T Areæ Curvarum Ordinatas habentium x, xy, x^2y, x^3y, x^4y, & Abſciſſam communem x.

Terminentur autem hæ Areæ omnes ad Abſciſſam totam datam AC, nec non ad Ordinatam poſitione datam & infinitè productam CI: Et erit Arearum ſub initio poſitarum prima $ADIC = A = P$; ſecunda $AEKC = tA - B = Q$; tertia $AFLC = \frac{ttA - 2tB + C}{2} = \frac{1}{2}R$; quarta $AGMC = \frac{t^3A - 3ttB + 3tC - D}{6} = \frac{1}{6}S$; quinta $AHNC = \frac{t^4A - 4t^3B + 6ttC - 4tD + E}{24} = \frac{1}{24}T$.

C O R O L L A R I U M.

Unde, ſi Curvæ, quarum Ordinatæ ſunt y, zy, z^2y, z^3y, *&c.* vel y, xy, x^2y, x^3y, *&c.* quadrari poſſunt, quadrabuntur etiam Curvæ $ADIC$, $AEKC$, $AFLC$, $AGMC$, *&c.* Et habebuntur Ordinatæ BE, BF, BG, BH Areis Curvarum proportionales.

S C H O L I U M.

Quantitatum fluentium Fluxiones eſſe primas, ſecundas, tertias, quartas, aliáſque diximus ſupra. Hæ Fluxiones ſunt ut Termini Serierum infinitarum convergentium. Ut ſi z^n ſit Quantitas fluens, & fluendo evadat $\overline{z + o}^n$, deinde reſolvatur in Seriem convergentem $z^n + noz^{n-1} + \frac{nn - n}{2}ooz^{n-2} + \frac{n^3 - 3nn + 2n}{6}o^3 z^{n-3} +$ *&c.*, Terminus primus hujus Seriei z^n erit Quantitas illa fluens; ſecundus noz^{n-1} erit ejus Incrementum primum, ſeu Differentia prima, cui naſcenti proportionalis eſt ejus Fluxio

 prima;

prima; tertius $\frac{nn - n}{2} oo z^{n-2}$, erit ejus Incrementum secundum, seu Differentia secunda, cui nascenti proportionalis est ejus Fluxio secunda; quartus $\frac{n^3 - 3nn + 2n}{6} o^3 z^{n-3}$, erit ejus Incrementum tertium, seu Differentia tertia, cui nascenti Fluxio tertia proportionalis est, & sic deinceps in infinitum.

Exponi autem possunt hæ Fluxiones per Curvarum Ordinatas BD, BE, BF, BG, BH, &c. ut, si Ordinata BE, $(= \frac{ADB}{1})$ sit Quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BD. Si BF $(= \frac{AEB}{1})$ sit Quantitas fluens, erit ejus Fluxio prima ut Ordinata BE, & Fluxio secunda ut Ordinata BD. Si BH $(= \frac{AGB}{1})$ sit Quantitas fluens, erunt ejus Fluxiones, prima, secunda, tertia, & quarta, ut Ordinatæ BG, BF, BE, BD, respectivè.

Et hinc in Æquationibus, quæ Quantitates tantùm duas incognitas involvunt, quarum una est Quantitas uniformiter fluens, & altera est Fluxio quælibet Quantitatis alterius fluentis, inveniri potest fluens illa altera per Quadraturam Curvarum. Exponatur enim Fluxio ejus per Ordinatam BD, & si hæc sit Fluxio prima, quæratur Area $ADB = BE \times 1$; si Fluxio secunda, quæratur Area $AEB = BF \times 1$; si Fluxio tertia, quæratur Area $AFB = BG \times 1$, &c. Et Area inventa erit Exponens Fluentis quæsitæ.

Sed & in Æquationibus, quæ Fluentem & ejus Fluxionem primam sine alterâ Fluente, vel duas ejusdem Fluentis Fluxiones, primam & secundam, vel secundam & tertiam, vel tertiam & quartam, &c. sine alterutrâ Fluente involvunt, inveniri possunt Fluentes per Quadraturam Curvarum. Sit Æquatio $aa\dot{u} = au + uu$, existente $u = BE$, $\dot{u} = BD$, $z = AB$, & $\dot{z} = 1$, & Æquatio illa, complendo Dimensiones Fluxionum, evadit $aa\dot{u} = au\dot{z} + uu\dot{z}$, seu $\frac{aa\dot{u}}{au + uu} = \dot{z}$. Jam fluat u uniformiter, &

& ſit ejus fluxio $\dot{u} = 1$, & erit $\frac{aa}{au + uu} = \dot{z}$; &, quadrando Curvam cujus Ordinata eſt $\frac{aa}{au + uu}$ & Abſciſſa u, habebitur Fluens $\dot{z}$. Adhuc ſit Æquatio $aa\ddot{u} = a\dot{u} + \dot{u}\dot{u}$, exiſtente $u = BF$, $\dot{u} = BE$, $\ddot{u} = BD$, & $z = AB$; &, per Relationem inter $\ddot{u}$ & $\dot{u}$, ſeu BD, & BE, invenietur Relatio inter AB, & BE ut in Exemplo ſuperiore. Deinde, per hanc Relationem, invenietur Relatio inter AB, & BF, quadrando Curvam AEB.

Æquationes, quæ tres incognitas Quantitates involvunt, aliquando reduci poſſunt ad Æquationes, quæ duas tantùm involvunt, & in his Caſibus Fluentes invenientur ex Fluxionibus, ut ſuprà.

Sit Æquatio $a - bx^{m} = cxy^{n}\dot{y} + dy^{2n}\ddot{y}\dot{y}$. Ponatur $y^{n}\dot{y} = \dot{u}$, & erit $a - bx^{m} = cx\dot{u} + d\dot{u}\ddot{u}$: hæc Æquatio, quadrando Curvam cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\dot{u}$, dat Aream u, & Æquatio altera $y^{n}\dot{y} = \dot{u}$, regrediendo ad Fluentes, dat $\frac{1}{n+1}y^{n+1} = u$. Unde habetur Fluens y.

Quin etiam in Æquationibus, quæ tres incognitas involvunt, & ad Æquationes, quæ duas tantùm involvunt, reduci non poſſunt, Fluentes quandoque prodeunt per Quadraturam Curvarum.

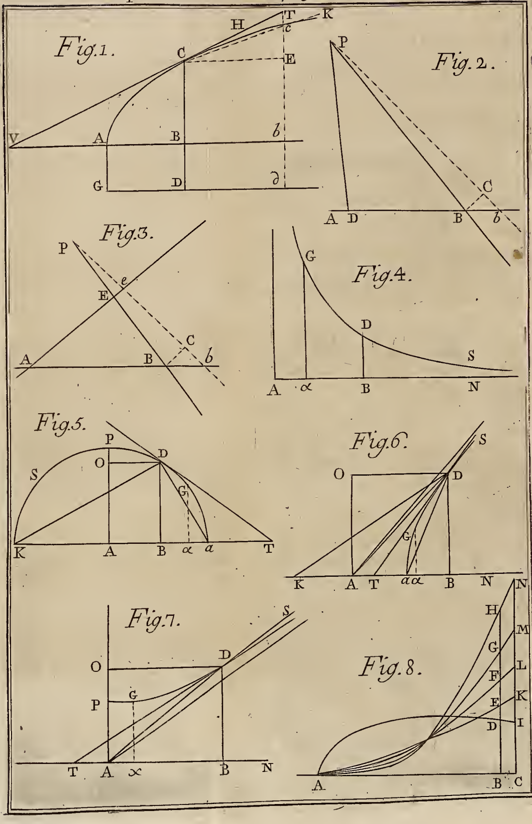
Sit Æquatio $\overline{ax^{m} + bx^{n}}|^{p} = rex^{r-1}y^{s} + sex^{r}\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^{t}$, exiſtente $\dot{x} = 1$. Et pars poſterior $rex^{r-1}y^{s} + sex^{r}\dot{y}y^{s-1} - f\dot{y}y^{t}$, regrediendo ad Fluentes, fit $ex^{r}y^{s} - \frac{f}{t+1}y^{t+1}$, quæ proinde eſt ut Area Curvæ, cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata $\overline{ax^{m} + bx^{n}}|^{p}$, & inde datur Fluens y.

Sit Æquatio $\dot{x} \times \overline{a x^{m} + b x^{n}}|^{p} = \frac{\dot{y} y^{n-1}}{\sqrt{e + f y^{n}}}$. Et Fluens, cujus Fluxio est $\dot{x} \times \overline{a x^{m} + b x^{n}}|^{p}$ erit ut Area Curvæ, cujus Abſciſſa eſt x & Ordinata eſt $\overline{a x^{m} + b x^{n}}|^{p}$. Item, Fluens, cujus Fluxio eſt $\frac{\dot{y} y^{n-1}}{\sqrt{e + f y^{n}}}$ erit ut Area Curvæ, cujus Abſciſſa eſt y & Ordinata $\frac{\dot{y} y^{n-1}}{\sqrt{e + f y^{n}}}$, id eſt, (per Caſum primum Formæ quartæ Tabulæ I.) ut Area $\frac{2d}{nf}\sqrt{e + f y^{n}}$. Pone ergo $\frac{2d}{nf}\sqrt{e + f y^{n}}$ æqualem Areæ Curvæ, cujus Abciſſa eſt x & Ordinata $\overline{a x^{m} + b x^{n}}|^{p}$, & habebitur Fluens y.

Et nota, quòd Fluens omnis, quæ ex Fluxione primâ colligitur, augeri poteſt vel minui Quantitate quâvis non Fluente. Quæ ex Fluxione ſecundâ colligitur, augeri poteſt vel minui Quantitate quâvis, cujus Fluxio ſecunda nulla eſt. Quæ ex Fluxione tertiâ colligitur, augeri poteſt vel minui Quantitate quâvis, cujus Fluxio tertia nulla eſt; & ſic deinceps in infinitum.

Poſtquàm verò Fluentes ex Fluxionibus collectæ ſunt, ſi de veritate concluſionis dubitatur, Fluxiones Fluentium inventarum viciſſim colligendæ ſunt & cum Fluxionibus ſub initio propoſitis comparandæ. Nam, ſi prodeunt æquales, concluſio rectè ſe habet: ſin minus, corrigendæ ſunt Fluentes ſic, ut earum Fluxiones Fluxionibus ſub initio propoſitis æquentur. Nam, & Fluens pro lubitu aſſumi poteſt, & aſſumptio corrigi, ponendo Fluxionem Fluentis aſſumptæ æqualem Fluxioni propoſitæ, & Terminos homologos inter ſe comparando.

Et his principiis via ad majora ſternitur.


Fig. 1.
T
K
H
c
C
E
V
A
B
b
G
D
∂
Fig. 2.
P
C
A
D
B
b
Fig. 3.
P
e
E
C
A
B
b
Fig. 4.
G
D
S
A
α
B
N
Fig. 5.
P
O
D
S
G
K
A
B
α
a
T
Fig. 6.
S
O
D
G
K
A
T
a
α
B
N
Fig. 7.
S
O
D
P
G
T
A
x
B
N
Fig. 8.
N
H
M
G
L
F
K
E
I
D
A
B
C

OPUSCULUM IV.

ISAACI NEWTONI

ENUMERATIO

LINEARUM

TERTII ORDINIS

Edita LONDINI 1706.

ISAACI NEWTONI ENUMERATIO LINEARUM TERTII ORDINIS.

I.

Linearum Ordines.

LINEÆ Geometricæ ſecundùm numerum Dimenſionum Æquationis, quâ Relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundùm numerum Punctorum, in quibus à Lineâ recta ſecari poſſunt, optimè diſtinguntur in ordines. Quâ ratione Linea primi Ordinis erit Recta ſola; eæ ſecundi ſive quadratici Ordinis erunt Sectiones conicæ & Circulus; & eæ tertii ſive cubici Ordinis Parabola cubica, Parabola *Nei-*

liana,

liana, Ciſſois Veterum, & reliquæ, quas hìc enumerare ſuſcepimus. Curva autem primi Generis, (ſiquidem Recta inter Curvas non eſt numeranda,) eadem eſt cum Lineâ ſecundi Ordinis; & Curva ſecundi Generis eadem cum Lineâ Ordinis tertii. Et Linea Ordinis infiniteſimi ea eſt, quam Recta in Punctis infinitis ſecare poteſt, qualis eſt Spiralis, Cyclois, Quadratrix, & Linea omnis, quæ per Radii vel Rotæ revolutiones infinitas generatur.

I I.

Proprietates Sectionum conicarum competunt Curvis ſuperiorum Generum.

Sectionum conicarum proprietates præcipuæ à Geometris paſſim traduntur. Et conſimiles ſunt proprietates Curvarum ſecundi Generis, & reliquarum, ut ex ſequenti proprietatum præcipuarum enumeratione conſtabit.

1. *De Curvarum ſecundi Generis Ordinatis, Diametris, Verticibus, Centris, Axibus.*

Si Rectæ plures parallelæ, & ad conicam Sectionem utrinque terminatæ ducantur, Recta duas earum biſecans biſecabit alias omnes, ideòque dicitur *Diameter* Figuræ; & Rectæ biſectæ dicuntur *Ordinatim applicatæ* ad Diametrum; & concurſus omnium Diametrorum eſt *Centrum* Figuræ; & interſectio Curvæ & Diametri *Vertex* nominatur; & Diameter illa *Axis* eſt, cui Ordinatim applicatæ inſiſtunt ad Angulos rectos. Et ad eundem modum in Curvis ſecundi Generis, ſi Rectæ duæ quævis parallelæ ducantur occurrentes Curvæ in tribus Punctis: Recta, quæ ita ſecat has parallelas, ut ſumma duarum partium ex uno ſecantis Latere ad Curvam terminatarum æquetur parti tertiæ ex altero Latere ad Curvam terminatæ, eodem modo ſecabit omnes alias his parallelas, Curvæque in tribus Punctis occurrentes Rectas, hoc eſt, ita ut ſumma partium duarum ex uno ipſius Latere ſemper æquetur parti tertiæ ex altero Latere. Has itaque tres partes, quæ hinc inde æquantur, *Ordinatim*

applicatas;

applicatas; & Rectam secantem, cui Ordinatim applicantur, *Diametrum*; & intersectionem Diametri, & Curvæ, *Verticem*; & concursum duarum Diametrorum *Centrum* nominare licet. Diameter autem ad Ordinatas rectangula, si modò aliqua sit, etiam *Axis* dici potest; & ubi omnes Diametri in eodem Puncto concurrunt, istud erit *Centrum generale*.

2. *De Asymptotis, & earum proprietatibus.*

Hyperbola primi generis duas *Asymptotos*, ea secundi tres, ea tertii quatuor, & non plures habere potest, & sic in reliquis. Et quemadmodum partes Lineæ cujusvis rectæ inter Hyperbolam conicam & duas ejus Asymptotos sunt hinc inde æquales: sic, in Hyperbolis secundi Generis, si ducatur Recta quævis secans tàm Curvam, quàm tres ejus Asymptotos in tribus Punctis, summa duarum partium istius Rectæ, quæ à duobus quibusvis Asymptotis in eandem plagam ad duo Puncta Curvæ extenduntur, æqualis erit parti tertiæ, quæ à tertià Asymptoto in plagam contrariam ad tertium Curvæ Punctum extenditur.

3. *De Lateribus rectis & transversis.*

Et, quemadmodum in conicis Sectionibus non Parabolicis Quadratum Ordinatim applicatæ, hoc est, Rectangulum Ordinatarum, quæ ad contrarias partes Diametri ducuntur, est ad Rectangulum partium Diametri, quæ ad Vertices Ellipseos, vel Hyperbolæ terminantur, ut data quædam Linea, quæ dicitur *Latus rectum*, ad partem Diametri, quæ inter Vertices jacet & dicitur *Latus transversum*: sic in Curvis non Parabolicis secundi Generis Parallelepipedum sub tribus Ordinatim applicatis est ad Parallelepipedum sub partibus Diametri ad Ordinatas & tres Vertices Figuræ abscissis, in Ratione quadam datâ: in quâ Ratione si sumantur tres Rectæ ad tres partes Diametri inter Vertices Figuræ sitas, singulæ ad singulas, tunc illæ tres Rectæ dici possunt *Latera recta* Figuræ; & illæ partes Diametri inter Vertices *Latera transversa*. Et, sicut in Parabolâ conicâ, quæ ad unam & eandem Diametrum unicum tantùm

habet Verticem, Rectangulum ſub Ordinatis æquatur Rectangulo ſub parte Diametri, quæ ad Ordinatas, & Verticem abſcinditur & Rectâ quadam datâ, quæ *Latus rectum* dicitur: ſic in Curvis ſecundi Generis, quæ non-niſi duos habent Vertices ad eandem Diametrum, Parallelepipedum ſub Ordinatis tribus æquatur Parallelepipedo ſub duabus partibus Diametri ad Ordinatas & Vertices illos duos abſciſſis, & Rectâ quâdam datâ, quæ proinde *Latus rectum* dici poteſt.

4. *De Ratione contentorum ſub Parallelarum ſegmentis.*

Denique, ſicut in conicis Sectionibus, ubi duæ parallelæ, ad Curvam utrinque terminatæ, ſecantur à duabus parallelis ad Curvam utrinque terminatis, prima à tertiâ, & ſecunda â quartâ, Rectangulum partium primæ eſt ad Rectangulum partium tertiæ, ut Rectangulum partium ſecundæ ad Rectangulum partium quartæ: ſic, ubi quatuor tales Rectæ occurrunt Curvæ ſecundi Generis, ſingulæ in tribus Punctis, Parallelepipedum partium primæ Rectæ erit ad Parallelepipedum partium tertiæ, ut Parallelepipedum partium ſecundæ ad Parallelepipedum partium quartæ.

5. *De Cruribus Hyperbolicis, & Parabolicis, & eorum plagis.*

Curvarum ſecundi, & ſuperiorum Generum, æquè atque primi, crura omnia in infinitum progredientia, vel *Hyperbolici* ſunt generis, vel *Parabolici*. Crus *Hyperbolicum* voco, quod ad Aſymptoton aliquam in infinitum appropinquat; *Parabolicum* quod Aſymptoto deſtituitur. Hæc crura ex Tangentibus optimè dignoſcuntur. Nam, ſi Punctum contactûs in infinitum abeat, Tangens cruris Hyperbolici cum Aſymptoto coincidet, & Tangens cruris Parabolici in infinitum recedet, evaneſcet, & nullibi reperietur. Invenitur igitur Aſymptotos cruris cujuſvis quærendo Tangentem cruris illius ad Punctum infinitè diſtans. Plaga autem cruris infiniti invenitur quærendo poſitionem Rectæ cujuſvis, quæ Tangenti parallela eſt, ubi Punctum contactûs in infinitum abit. Nam hæc Recta in eandem plagam cum crure infinito dirigitur.

III. Re-

III.

Reductio Curvarum omnium Generis secundi ad Æquationum casus quatuor.

Lineæ omnes Ordinis primi, tertii, quinti, septimi, & imparis cujusque, duo habent, ad minimum, crura in infinitum versus plagas oppositas progredientia. Et Lineæ omnes tertii Ordinis duo habent ejusmodi crura in plagas oppositas progredientia, in quas nulla alia earum crura infinita (præterquam in Parabolâ *Cartesianâ*) tendunt.

CAS. I.

TAB. I.

Si crura illa sint Hyperbolici Generis, sit (*Fig.* 1.) GAS eorum Asymptotos, & huic parallela agatur Recta quævis CBc ad Curvam utrinque, (si fieri potest,) terminata, eadémque bisecetur in Puncto X, & locus Puncti illius X erit Hyperbola conica, (puta X Φ,) cujus una Asymptotos est AG. Sit ejus altera Asymptotos AB, & Æquatio, quâ Relatio inter Ordinatam BC, & Abscissam AB definitur, si AB dicatur x, & BC y, semper induet hanc formam $xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d$. Ubi Termini, e, a, b, c, d, designant Quantitates datas signis suis $+$, & $-$ affectas, quarum quælibet deesse possunt, modò ex earum defectu Figura in Sectionem conicam non vertatur. Potest autem Hyperbola illa conica cum Asymptotis suis coincidere, id est Punctum X in Rectâ AB locari: & tunc Terminus $+ ey$ deest.

CAS. II.

TAB. I.

At si (*Fig.* 2.) Recta illa CBc non potest utrinque ad Curvam terminari, sed Curvæ in unico tantùm Puncto occurrit: age quamvis Positione datam Rectam AB Asymptoto AS occurrentem in A, ut & aliam quamvis BC Asymptoto illi parallelam, Curvæque occurrentem in Puncto C; & Æquatio, quâ Relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam,

$$xy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

 CAS.

CAS. III.

Quòd si crura illa opposita Parabolici sint Generis, Recta (*Fig.* 3.) CBc ad Curvam utrinque, si fieri potest, terminata in plagam crurum ducatur, & bisecetur in B, & locus Puncti B erit Linea recta. Sit ista AB, terminata ad datum quodvis Punctum A, & Æquatio, quâ Relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AB definitur, semper induet hanc formam,

$$yy = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

CAS. IV.

TAB. I. At verò si (*Fig.* 4.) Recta illa CBc in unico tantùm Puncto occurrat Curvæ, ideóque ad Curvam utrinque terminari non possit; sit Punctum illud C, & incidat Recta illa ad Punctum B in Rectam quamvis aliam, Positione datam, & ad datum quodvis Punctum A terminatam, AB: & Æquatio, quâ Relatio inter Ordinatam BC & Abscissam AC definitur, semper induet hanc formam,

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Nomina formarum.

Enumerando Curvas horum Casuum, Hyperbolam vocabimus, *Inscriptam*, quæ tota jacet in Asymptotôn Angulo ad-instar Hyperbolæ conicæ; *Circumscriptam*, quæ Asymptotos secat, & partes Abscissas in sinu suo amplectitur; *Ambigenam*, quæ uno crure infinito inscribitur & altero circumscribitur; *Convergentem*, cujus crura concavitate suâ se invicem respiciunt, & in plagam eandem diriguntur; *Divergentem*, cujus crura convexitate suâ se invicem respiciunt & in plagas contrarias diriguntur; *Cruribus Contrariis præditam*, cujus crura in partes contrarias convexa sunt, & in plagas contrarias infinita; *Conchoidalem*, quæ Vertice concavo & cruribus divergentibus ad Asymptoton applicatur; *Anguineam*, quæ Flexibus contrariis Asymptoton secat, & utrinque in crura contraria producitur; *Cruciformem*, quæ conjugatam decussat; *Nodatam*, quæ

quæ ſeipſam decuſſat in orbem redeundo; *Cuſpidatam*, cujus partes duæ in Angulo contactûs concurrunt & ibi terminantur; *Punctatam*, quæ conjugatam habet Ovalem infinitè parvam, id eſt, Punctum; & *Puram*, quæ, per impoſſibilitatem duarum Radicum, Ovali, Nodo, Cuſpide & Puncto conjugato privatur. Eodem ſenſu Parabolam quoque *convergentem*, *divergentem*, *cruribus contrariis præditam*, *cruciformem*, *nodatam*, *cuſpidatam*, *punctatam & puram* nominabimus.

In Caſu primo ſi Terminus ax^3 affirmativus eſt, Figura erit (*Fig.* 5.) Hyperbola triplex cum ſex cruribus Hyperbolicis, quæ juxta tres Aſymptotos, quarum nullæ ſunt parallelæ, in infinitum progrediuntur, binæ juxta unamquamque in plagas contrarias. Et hæ Aſymptoti, ſi Terminus bx^2 non deeſt, ſe mutuò ſecabunt in tribus Punctis Triangulum ($D\,d\,\delta$) inter ſe continentes, ſin terminus bx^2 deeſt, convergent omnes ad idem Punctum. In priori Caſu cape $AD = \frac{-b}{2a}$, & $Ad = A\delta = \frac{b}{2\sqrt{a}}$, ac junge Dd, $D\delta$, & erunt Ad, Dd, $D\delta$ tres Aſymptoti. In poſteriori (*Fig.* 6.) duc Ordinatam quamvis BC, Ordinatæ principali AG parallelam, & in eâ utrinque productâ cape hinc inde BF, & Bf ſibi mutuò æquales, & in eâ Ratione ad AB, quam habet $\sqrt{a}$ ad 1, jungéque AF, Af; & erunt AG, AF, Af tres Aſymptoti. Hanc Hyperbolam vocamus *Redundantem*, quia numero crurum Hyperbolicorum Sectiones Conicas ſuperat.

TAB. I.

In Hyperbolâ omni redundante, ſi neque Terminus ey deſit, neque ſit $bb - 4ac$ æquale $+ ae\sqrt{a}$, Curva nullam habebit Diametrum; ſin eorum alterutrum accidit, Curva habebit unicam Diametrum, & tres ſi utrumque. Diameter autem ſemper tranſit per interſectionem duarum Aſymptotôn, & biſecat Rectas omnes, quæ ad Aſymptotos illas utrinque terminantur & parallelæ ſunt Aſymptoto tertiæ. Eſtque Abſciſſa AB Diameter Figuræ quoties Terminus ey deeſt. *Diametrum* verò abſolutè dictam hìc & in ſequentibus in vulgari ſignificatu uſurpo, nempe pro Abſciſſâ, quæ paſſim habet Ordinatas binas æquales ad idem Punctum hinc inde inſiſtentes.

I V.

Enumeratio Curvarum.

1. *De Hyperbolis novem redundantibus, quæ Diametro destituuntur, & tres habent Asymptotos Triangulum capientes.*

Si Hyperbola redundans nullam habet Diametrum, quærantur Æquationis hujus $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ Radices quatuor seu valores ipsius x. Eæ sunto (*Fig.* 5. *&c.*) AP, $A\varpi$, $A\pi$, Ap. Erigantur Ordinatæ PT, $\varpi\tau$, $\pi 7$, pt, & hæ tangent Curvam in Punctis totidem T, τ, 7, t, & tangendo dabunt Limites Curvæ, per quos Species ejus innotescet.

TAB. I. & seq.

Nam, si Radices omnes AP, $A\varpi$, Ap, (*Fig.* 5. 7.) sunt reales, ejusdem signi, & inæquales, Curva constat ex tribus Hyperbolis, (inscriptâ, circumscriptâ, & ambigenâ) cum *Ovali.* Hyperbolarum una jacet versùs D, altera versus d, tertia versùs δ, & Ovalis semper jacet intra Triangulum D d δ, atque etiam inter medios Limites 7 & τ, in quibus utique tangitur ab Ordinatis $\pi 7$ & $\varpi\tau$. Et hæc est *Species prima.*

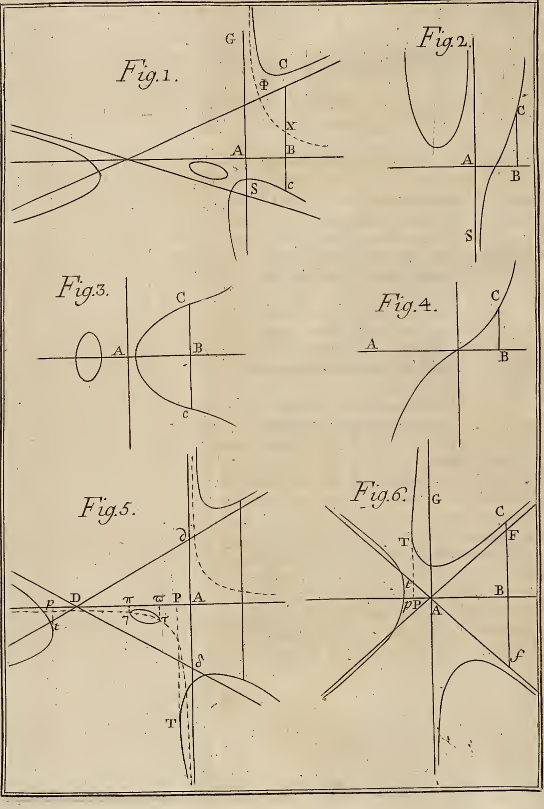
TAB. I. & II.

Si è Radicibus duæ maximæ $A\pi$, Ap, (*Fig.* 8.) vel duæ minimæ AP, $A\varpi$ (*Fig.* 9.) æquantur inter se, & ejusdem sunt signi cum alteris duobus, Ovalis & Hyperbola circumscripta sibi invicem junguntur, coeuntibus earum Punctis contactûs 7, & t, vel T, & τ, & crura Hyperbolæ sese decussando in Ovalem continuantur, Figuram *Nodatam* efficientia. Quæ *Species* est *secunda.*

TAB. II.

Si è Radicibus tres maximæ Ap, $A\pi$, $A\varpi$, (*Fig.* 10.,) vel tres minimæ $A\pi$, $A\varpi$, AP (*Fig.* 11.) æquentur inter se, Nodus in *Cuspidem* acutissimum convertetur. Nam, crura duo Hyperbolæ circumscriptæ ibi in Angulo contactûs concurrent, & non ultra producentur. Et hæc est *Species tertia.*

Si è Radicibus duæ mediæ $A\varpi$ & $A\pi$ (*Fig.* 12.,) æquentur inter se, Puncta contactûs τ, & 7 coincidunt, & propterea Ovalis interjecta in Punctum evanuit, & constat Figura ex tribus Hyperbolis


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

bolis, inscriptâ, circumscriptâ, & ambigenâ cum *Puncto* conjugato. Quæ est *Species quarta.*

Si duæ ex Radicibus sunt impossibiles & reliquæ duæ inæquales, & ejusdem signi (nam signa contraria habere nequeunt,) *Puræ* habebuntur Hyperbolæ tres sine Ovali, vel Nodo, vel Cuspide, vel Puncto conjugato, & hæ Hyperbolæ, vel ad latera Trianguli ab Asymptotis comprehensi, vel ad Angulos ejus jacebunt; & perinde *Speciem*, vel *quintam* (*Fig.* 12. 13.), vel *sextam* (*Fig.* 14. 15.) constituent. TAB. II.

Si è Radicibus duæ sunt æquales, & alteræ duæ, vel impossibiles sunt (*Fig.* 16. 18.), vel reales (*Fig.* 17. 19.) cum signis, quæ â signis æqualium Radicum diversa sunt, Figura *Cruciformis* habebitur, nempe duæ ex Hyperbolis se invicem decussabunt, idque, vel ad Verticem Trianguli ab Asymptotis comprehensi (*Fig.* 18. 19.), vel ad ejus Basem (*Fig.* 16. 17.) Quæ duæ *Species* sunt *septima* & *octava.* TAB. III. TAB. IV.

Si denique Radices omnes sunt impossibiles (*Fig.* 20.), vel si omnes sunt reales, & inæquales (*Fig.* 21.), & earum duæ sunt affirmativæ, & alteræ duæ negativæ, tunc duæ habebuntur Hyperbolæ ad Angulos oppositos duarum Asymptotôn cum Hyperbolâ *Anguineâ* circa Asymptoton tertiam. Quæ *Species* est *nona.*

Et hi sunt omnes Radicum casus possibiles. Nam, si duæ Radices sunt æquales inter se, & aliæ duæ sunt etiam inter se æquales, Figura evadet Sectio conica cum Lineâ rectâ.

2. *De Hyperbolis duodecim redundantibus unicam tantùm Diametrum habentibus.*

Si Hyperbola redundans habet unicam tantùm Diametrum, sit ejus Diameter Abscissa AB, & Æquationis hujus $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ quære tres Radices seu valores x.

Si Radices illæ sunt omnes reales, & ejusdem signi, Figura constabit ex *Ovali* intra Triangulum $Dd\delta$ (*Fig.* 22.) jacente, & tribus Hyperbolis ad Angulos ejus, nempe Circumscriptâ ad Angulum TAB. IV.

D, &c

D, & Inſcriptis duabus ad Angulos d, & δ. Et hæc eſt *Species decima.*

Si Radices duæ majores ſunt æquales, & tertia ejuſdem ſigni, crura Hyperbolæ jacentis verſùs D (*Fig.* 23.) ſeſe decuſſabunt in formâ *Nodi* propter contactum Ovalis. Quæ *Species* eſt *undecima.*

Si tres Radices ſunt æquales, Hyperbola iſta fit *Cuſpidata* ſine Ovali (*Fig.* 24.) Quæ *Species* eſt *duodecima.* TAB. VI.

Si Radices duæ minores ſunt æquales, & tertia ejuſdem ſigni, Ovalis in *Punctum* evanuit, (*Fig.* 25.) Quæ *Species* eſt *decima tertia.* TAB. V.

In Speciebus quatuor noviſſimis Hyperbola, quæ jacet verſùs D, Aſymptotos in ſinu ſuo amplectitur, reliquæ duæ in ſinu Aſyptotôn jacent.

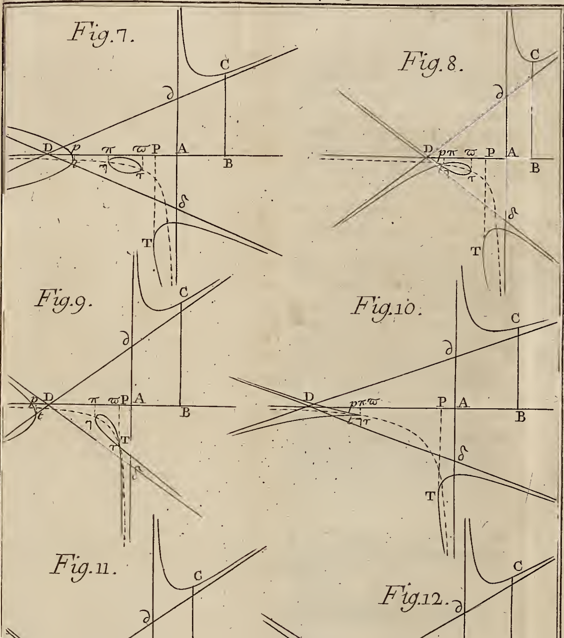
Si duæ ex Radicibus ſunt impoſſibiles, habebuntur tres Hyperbolæ *Puræ*, ſine Ovali, Decuſſatione, vel Cuſpide. Et hujus Caſûs *Species* ſunt quatuor: nempe *decima quarta*, ſi Hyperbola Circumſcripta jacet verſùs D, (*Fig.* 25.) & *decima quinta*, ſi Hyperbola Inſcripta jacet verſùs D, (*Fig.* 26.) & *decima ſexta*, ſi Hyperbola Circumſcripta jacet ſub Baſi dδ Trianguli Ddδ, (*Fig.* 27.) & *decima ſeptima*, (*Fig.* 28.), ſi Hyperbola Inſcripta jacet ſub eâdem Baſi.

Si duæ Radices ſunt æquales, & tertia ſigni diverſi, Figura erit *Cruciformis.* Nempe, duæ ex tribus Hyperbolis ſe invicem decuſſabunt; ídque, vel ad Verticem Trianguli ab Aſymptotis comprehenſi, (*Fig.* 29.), vel ad ejus Baſem, (*Fig.* 30.) Quæ duæ *Species* ſunt *decima octava*, & *decima nona.*

Si duæ Radices ſunt inæquales, & ejuſdem ſigni, & tertia eſt ſigni diverſi, duæ habebuntur Hyperbolæ in oppoſitis Angulis duarum Aſymptotôn cum *Conchoidali* intermediâ. *Conchoidalis* autem, vel jacebit ad eaſdem partes Aſymptoti ſuæ cum Triangulo ab Aſymptotis conſtituto, (*Fig.* 31.) vel ad partes contrarias; (*Fig.* 32.) Et hi duo Caſus conſtituunt *Speciem vigeſimam*, & *vigeſimam primam.* TAB. VI.

3 De

Opusc. IV. Tab. II. *pag. 256. Tom. I.*



3 De Hyperbolis duabus redundantibus cum tribus Diametris.

Hyperbola redundans, quæ habet tres Diametros, conſtat ex tribus Hyperbolis in ſinubus Aſymptotôn jacentibus; idque, vel ad Angulos Trianguli ab Aſymptotis comprehenſi, (*Fig.* 33.), vel ad ejus Latera, (*Fig.* 34.). Caſus prior dat *Speciem vigeſimam ſecundam*, & poſterior *Speciem vigeſimam tertiam*. TAB. VI.

4. De Hyperbolis novem redundantibus cum Aſymptotis tribus ad commune Punctum convergentibus.

Si tres Aſymptoti in Puncto communi ſe mutuò decuſſant, vertuntur Species quinta, & ſexta in *vigeſimam quartam*; (*Fig.* 6.) ſeptima, & octava in *vigeſimam quintam*, (*Fig.* 35.) & nona in *vigeſimam ſextam*, (*Fig.* 36.) ubi Anguinea non tranſit per concurſum Aſymptotôn; & in *vigeſimam ſeptimam*, ubi tranſit per concurſum illum, (*Fig.* 37.), quo Caſu Termini b, ac d deſunt, & concurſus Aſymptotôn eſt Centrum Figuræ ab omnibus ejus partibus oppoſitis æqualiter diſtans. Et hæ quatuor Species Diametrum non habent. TAB. I. TAB. VI. TAB. VII.

Vertuntur etiam *Species* decima quarta, ac decima ſexta in *vigeſimam octavam*; (*Fig.* 38.) decima quinta, ac decima ſeptima in *vigeſimam nonam*; (*Fig.* 39.) decima octava, & decima nona in *triceſimam*; (*Fig.* 40.) & vigeſima cum vigeſimâ primâ in *triceſimam primam*, (*Fig.* 41.) Et hæ Species unicam habent Diametrum.

Ac denique Species vigeſima ſecunda, & vigeſima tertia vertuntur in *Speciem triceſimam ſecundam*, cujus tres ſunt Diametri per concurſum Aſymptotôn tranſeuntes (*Fig.* 42.).

Quæ omnes converſiones facillimè intelliguntur faciendo, ut Triangulum ab Aſymptotis comprehenſum diminuatur, donec in Punctum evaneſcat.

5. *De Hyperbolis sex defectivis Diametrum non habentibus.*

Si in primo Æquationum Casu Terminus ax^3 negativus est, Figura erit Hyperbola defectiva unicam habens Asymptoton, & duo tantùm crura Hyperbolica juxta Asymptoton illam in plagas contrarias infinitè progredientia. Et Asymptotos illa est Ordinata prima, & principalis AG. Si Terminus ey non deest, Figura nullam habebit Diametrum, si deest habebit unicam. In priori Casu Species sic enumerantur.

Si Æquationis hujus $ax^4 = bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4} ee$ Radices omnes $A\pi$, AP, Ap, $A\varpi$, (*Fig.* 43.) sunt reales, & inæquales, Figura erit Hyperbola Anguinea Asymptoton Flexu contrario amplexa, cum *Ovali* conjugatâ. Quæ *Species* est *tricesima tertia.*

TAB. VIII.

Si Radices duæ mediæ AP, & Ap, (*Fig.* 44.) æquentur inter se, Ovalis, & Anguinea junguntur sese decussantes in forma *Nodi.* Quæ est *Species tricesima quarta.*

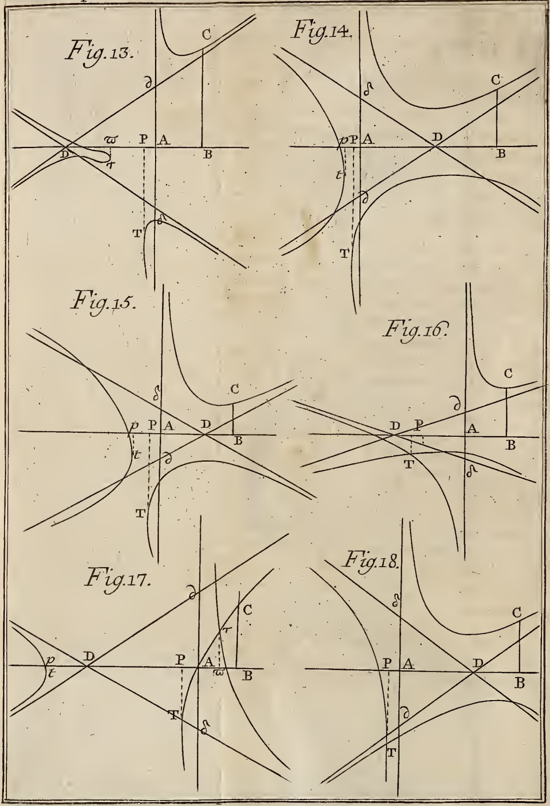
Si tres Radices sunt æquales, Nodus vertetur in *Cuspidem* acutissimum in vertice Anguineæ; (*Fig.* 45.) Et hæc est *Species tricesima quinta.*

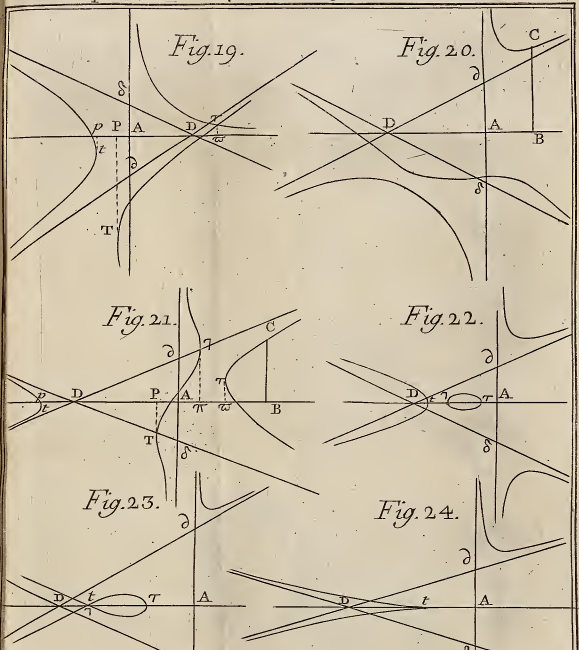
Si è tribus Radicibus ejusdem signi, duæ maximæ, Ap & $A\varpi$ (*Fig.* 47.) sibi mutuò æquantur, Ovalis in *Punctum* evanuit. Quæ *Species* est *tricesima sexta.*

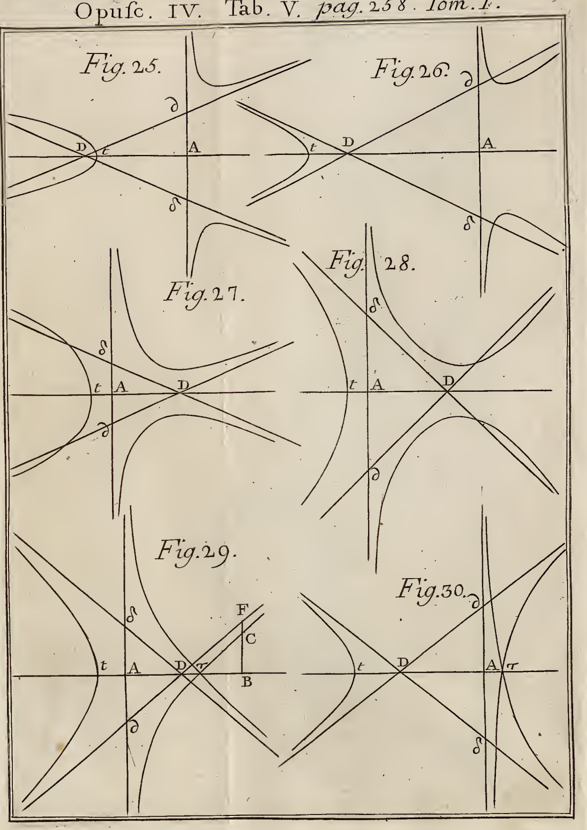
Si Radices duæ quævis imaginariæ sunt, sola manebit Anguinea *Pura* sine Ovali, Decussatione, Cuspide, vel Puncto conjugato. Si Anguinea illa non transit per Punctum A, (*Fig.* 46.) *Species* est *tricesima septima*; sin transit per Punctum illud A (id quod contingit, ubi Termini b, ac d desunt,) Punctum illud A erit Centrum Figuræ Rectas omnes per ipsum ductas, & ad Curvam utrinque terminatas, bisecans (*Fig.* 47.) Et hæc est *Species tricesima octava.*

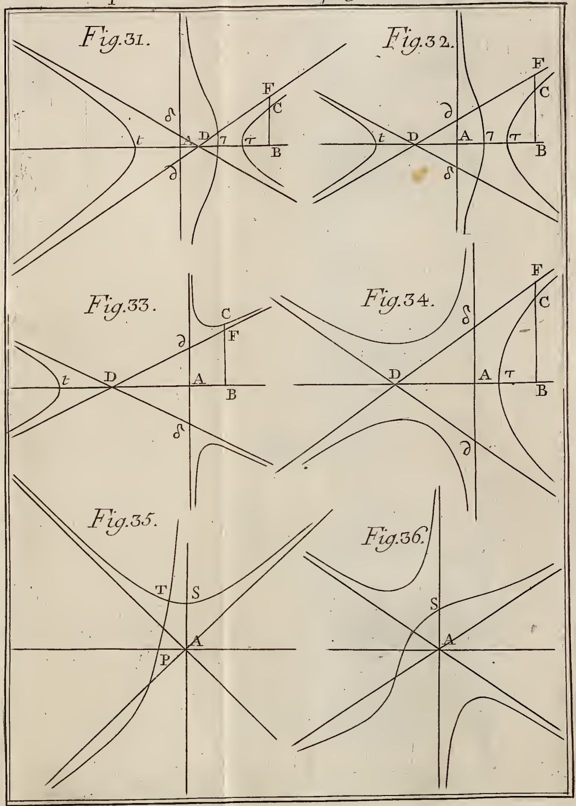
6. *De Hyperbolis septem defectivis Diametrum habentibus.*

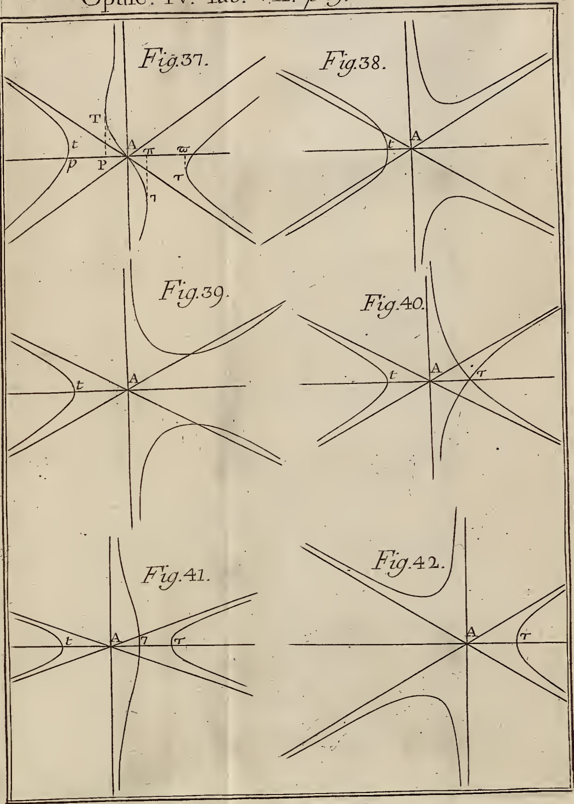
In altero Casu, ubi Terminus ey deest, & propterea Figura Diame-


Fig.13.
C
∂
ϖ P A
D B
τ
T ∂
Fig.14.
δ
C
p P A D
B
t
∂
T
Fig.15.
δ
C
p P A D
B
t
∂
T
Fig.16.
C
∂
D P A
B
T
δ
Fig.17.
∂
C
τ
p D P A
t ϖ B
T
δ
Fig.18.
δ
C
P A D
B
∂
T

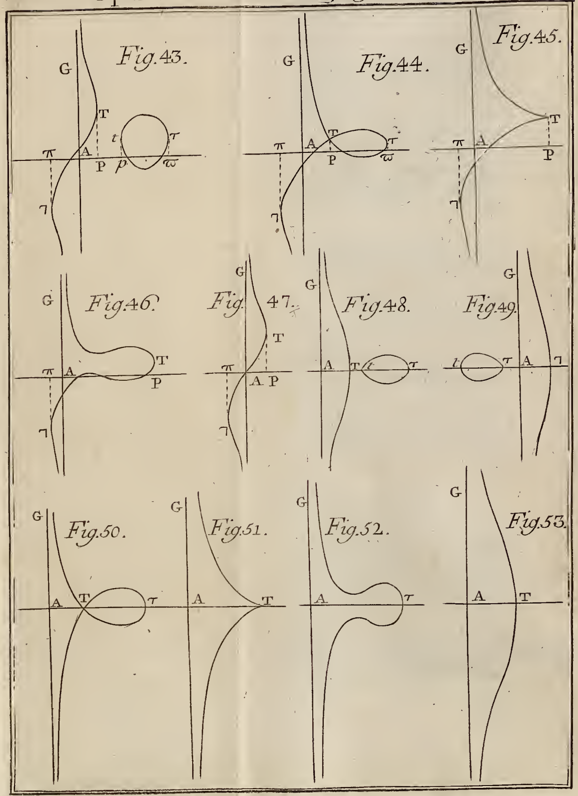

Fig. 19.
δ
p P A D τ
t ϖ
∂
T
Fig. 20.
C
∂
D A
B
δ
Fig. 21.
C
∂ γ
τ
p D P A
t π ϖ B
T δ
Fig. 22.
∂
D t γ τ A
δ
Fig. 23.
∂
D t τ A
γ
δ
Fig. 24.
∂
D t A
δ


Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
D
A
t
F
C
B


Fig.31.
Fig.32.
Fig.33.
Fig.34.
Fig.35.
Fig.36.
F
C
A
D
B
T
S
P


Fig. 37.
T
t
A
π
ϖ
p
P
τ
Fig. 38.
t
A
Fig. 39.
A
t
Fig. 40.
A
t
τ
Fig. 41.
t
A
τ
Fig. 42.
A
τ

Opusc. IV. Tab. VIII. *pag.* 258. *Tom. I.*



Diametrum habet, si Æquationis hujus $ax^3 = bx^2 + cx + d$ Radices omnes AT, At, Aτ, (*Fig.* 48.) sunt reales, inæquales, & ejusdem signi, Figura erit Hyperbola Conchoidalis cum *Ovali* ad convexitatem. Quæ est *Species tricesima nona*. TAB. VIII.

Si duæ Radices sunt inæquales, & ejusdem signi, & tertia est signi contrarii, *Ovalis* jacebit ad concavitatem Conchoidalis; (*Fig.* 49.) Estque *Species quadragesima*.

Si Radices duæ minores AT, At, (*Fig.* 50.) sunt æquales; & tertia Aτ, est ejusdem signi; Ovalis, & Conchoidalis jungentur sese decussando in modum *Nodi*. Quæ *Species* est *quadragesima prima*.

Si tres Radices sunt æquales, Nodus mutabitur in *Cuspidem*, & Figura erit *Cissois Veterum*, (*Fig.* 51.) Et hæc est *Species quadragesima secunda*.

Si Radices duæ majores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi; Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad convexitatem suam, (*Fig.* 52.) Estque *Species quadragesima tertia*.

Si Radices duæ sunt æquales, & tertia est signi contrarii, Conchoidalis habebit *Punctum* conjugatum ad concavitatem suam, (*Fig.* 53.) Estque *Species quadragesima quarta*.

Si Radices duæ sunt impossibiles habebitur Conchoidalis *Pura* sine Ovali, Nodo, Cuspide, vel Puncto conjugato (*Fig.* 52. & 53.). Quæ *Species* est *quadragesima quinta*.

7. *De Hyperbolis septem Parabolicis Diametrum non habentibus.*

Si quando in primo Æquationum Casu Terminus ax^3 deest, & Terminus bxx non deest, Figura erit Hyperbola Parabolica duo habens crura Hyperbolica ad unam Asymptoton SAG & duo Parabolica in plagam unam & eandem convergentia. Si Terminus ey non deest, Figura nullam habebit Diametrum; sin deest, habebit unicam. In Priori Casu Species sunt hæ.

Si tres Radices AP, Aϖ, Aπ (*Fig.* 54.) Æquationis hujus $bx^3 + cxx + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ sunt inæquales & ejusdem signi, TAB. IX.

 Figura

Figura constabit ex *Ovali*, & aliis duabus Curvis, quæ partim Hyperbolicæ sunt, & partim Parabolicæ. Nempe crura Parabolica continuo ductu junguntur cruribus Hyperbolicis sibi proximis. Et hæc est *Species quadragesima sexta*.

Si Radices duæ minores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi; Ovalis, & una Curvarum illarum Hyperbolo-Parabolicarum junguntur & se decussant in formam *Nodi* (*Fig.* 55.) Quæ *Species* est *quadragesima septima*. TAB. IX.

Si tres Radices sunt æquales, Nodus ille in Cuspidem vertitur (*Fig.* 56.) Estque *Species quadragesima octava*.

Si Radices duæ majores sunt æquales, & tertia est ejusdem signi; Ovalis in *Punctum* conjugatum evanuit (*Fig.* 57.) Quæ *Species* est *quadragesima nona*.

Si duæ Radices sunt impossibiles, manebunt *Puræ* illæ duæ Curvæ Hyperbolo-Parabolicæ sine Ovali, Decussatione, Cuspide, vel Puncto conjugato; & *Speciem quinquagesimam* constituent. (*Fig.* 57. & 58.)

Si Radices duæ sunt æquales, & tertia est signi contrarii; Curvæ illæ Hyperbolo-Parabolicæ junguntur sese decussando in morem crucis (*Fig.* 59.) Estque *Species quinquagesima prima*.

Si Radices duæ sunt inæquales, & ejusdem signi, & tertia est signi contrarii; Figura evadet Hyperbola Anguinea circa Asymptoton AG, (*Fig.* 60.) cum Parabolâ conjugatâ. Et hæc est *Species quinquagesima secunda*.

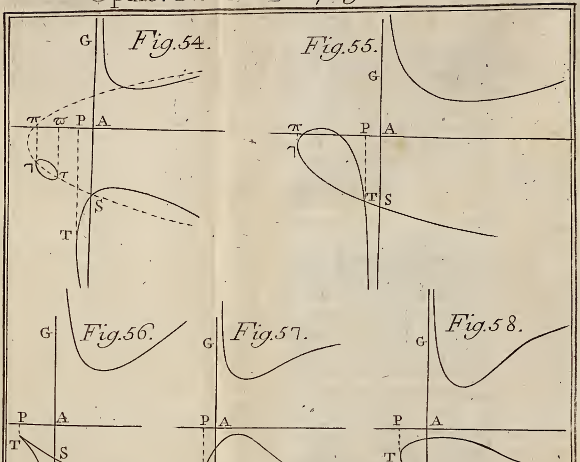
8. *De Hyperbolis quatuor Parabolicis Diametrum habentibus.*

In altero Casu, ubi Terminus ey deest, & Figura Diametrum habet, si duæ Radices Æquationis hujus $bxx + cx + d = 0$ sunt impossibiles; duæ habentur Figuræ Hyperbolo-Parabolicæ à Diametro AB (*Fig.* 61.) hinc inde æqualiter distantes. Quæ *Species* est *quinquagesima tertia*.

Si Æquationis illius Radices duæ sunt impossibiles, Figuræ Hyperbolo-Parabolicæ junguntur sese decussantes in morem crucis; & *Speciem quinquagesimam quartam* constituunt. (*Fig.* 62.) TAB. X.

Si

Opusc. IV. Tab. IX. pag. 260. Tom. I.



Si Radices illæ ſunt inæquales & ejuſdem ſigni; habetur Hyperbola Conchoidalis cum Parabolâ ex eodem latere Aſymptoti. (*Fig.* 63.) TAB. X. Eſtque *Species quinquageſima quinta.*

Si Radices illæ ſunt ſigni contrarii; habetur Conchoidalis cum Parabolâ ad alteras partes Aſymptoti (*Fig.* 64.). Quæ *Species* eſt *quinquageſima ſexta.*

9. *De Quatuor Hyperboliſmis Hyperbolæ.*

Si quando, in primo Æquationum caſu, Terminus uterque ax^2, & bxx deeſt; Figura erit Hyperboliſmus Sectionis alicujus conicæ. *Hyperboliſmum* Figuræ voco, cujus Ordinata prodit applicando contentum ſub Ordinatâ Figuræ illius & Rectâ datâ ad Abſciſſam communem. Hac ratione Linea recta vertitur in Hyperbolam conicam, & Sectio omnis conica vertitur in aliquam Figurarum, quas hic Hyperboliſmos Sectionum conicarum voco. Nam, Æquatio ad Figuras, de quibus agimus, nempe $xyy+ey=cx+d$, dat $y=\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2x}$; quæ generatur applicando contentum ſub Ordinatâ Sectionis conicæ $\frac{e\pm\sqrt{ee+4dx+4cxx}}{2m}$, & Rectâ datâ m, ad Curvarum Abſciſſam communem x. Unde liquet, quòd Figura genita Hyperboliſmus erit Hyperbolæ, Ellipſeos, vel Parabolæ, perinde ut Terminus cx affirmativus eſt, vel negativus, vel nullus.

Hyperboliſmus Hyperbolæ tres habet Aſymptotos, quarum una eſt Ordinata prima & principalis Ad, alteræ duæ ſunt parallelæ Abſciſſæ AB, ab eâdem hinc inde æqualiter diſtant. In Ordinatâ principali Ad, cape Ad, $A\delta$, hinc inde æquales Quantitati $\sqrt{c}$; & per Puncta d, ac δ age dg, $\delta\gamma$ Aſymptotos Abſciſſæ AB parallelas.

Ubi Terminus ey non deeſt, Figura nullam habet Diametrum. In hoc Caſu, ſi Æquationis hujus $cxx+dx+\frac{1}{4}ee=0$ Radices duæ AP, Ap (*Fig.* 65.) ſunt reales & inæquales, (nam æquales eſſe nequeunt niſi Figura ſit conica Sectio, Figura conſtabit ex tri-

bus Hyperbolis ſibi oppoſitis, quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas, & alteræ duæ jacent extra. Et hæc eſt *Species quinquageſima ſeptima.*

Si Radices illæ duæ ſunt impoſſibiles, habentur Hyperbolæ duæ oppoſitæ extra Aſymptotos parallelas & Anguinea Hyperbolica intra eaſdem. Hæc Figura duarum eſt ſpecierum. Nam, Centrum non habet, ubi Terminus d non deeſt: (*Fig. 66.*) ſed ſi Terminus ille deeſt, Punctum A eſt ejus centrum (*Fig. 67.*) Prior *Species* eſt *quinquageſima octava*, poſterior *quinquageſima nona.*

TAB. X.

Quòd ſi Terminus ey deeſt, Figura conſtabit ex tribus Hyperbolis oppoſitis, quarum una jacet inter Aſymptotos parallelas, & alteræ duæ jacent extra, ut in Specie quinquageſimâ quartâ, & præterea Diametrum habet, quæ eſt Abſciſſa AB (*Fig. 68.*) Et hæc eſt *Species ſexageſima.*

10. *De tribus Hyperboliſmis Ellipſeos.*

Hyperboliſmus Ellipſeos per hanc Æquationem definitur $xyy + ey = cx + d$, & unicam habet Aſymptoton, quæ eſt Ordinata principalis Ad (*Fig. 69.*) Si Terminus ey non deeſt, Figura eſt Hyperbola Anguinea ſine Diametro; atque etiam ſine Centro, ſi Terminus d non deeſt. Quæ *Species* eſt *ſexageſima prima.*

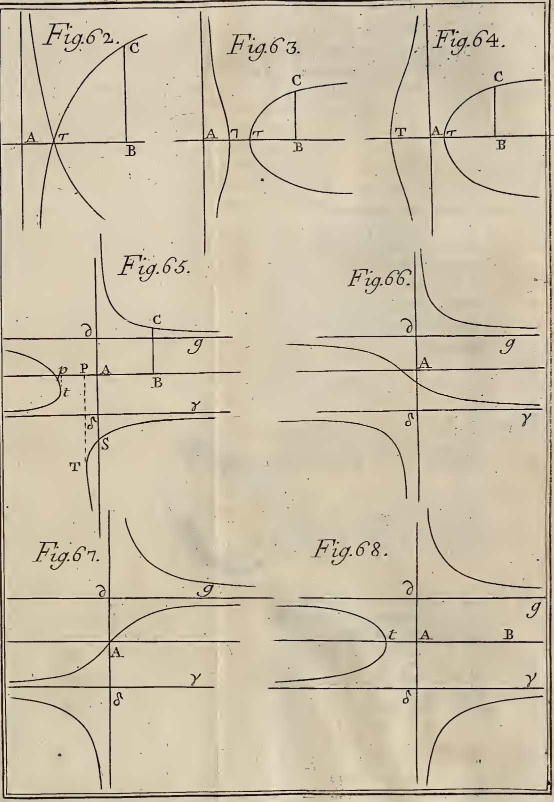
TAB XI.

At ſi Terminus d deeſt, Figura habet Centrum ſine Diametro, & Centrum ejus eſt Punctum A (*Fig. 70.*) *Species* verò eſt *ſexageſima ſecunda.*

Et, ſi Terminus ey deeſt & Terminus d non deeſt, Figura eſt Conchoidalis ad Aſymptoton AG (*Fig. 71.*,) habétque Diametrum ſine Centro, & Diameter ejus eſt Abſciſſa AB. Quæ *Species* eſt *ſexageſima tertia.*

11. *De duobus Hyperboliſmis Parabolæ.*

Hyperboliſmus Parabolæ per hanc Æquationem definitur $xyy + ey = d$; & duas habet Aſymptotos, Abſciſſam AB, & Ordinatam pri-


Fig. 62.
C
A
τ
B
Fig. 63.
C
A
τ
B
Fig. 64.
C
T
A
τ
B
Fig. 65.
C
∂
g
p
P
A
B
t
γ
δ
S
T
Fig. 66.
∂
g
A
δ
γ
Fig. 67.
∂
g
A
γ
δ
Fig. 68.
∂
g
t
A
B
γ
δ

primam & principalem A G. Hyperbolæ verò in hac Figurâ ſunt duæ, non in Aſymptotôn Angulis oppoſitis, ſed in Angulis qui ſunt deinceps jacentes, ídque ad utrumque Latus Abſciſſæ A B, &, vel ſine Diametro, ſi Terminus ey habetur, (*Fig.* 72.) vel cum Diametro, ſi Terminus ille deeſt, (*Fig.* 73.) Quæ duæ *Species* ſunt *ſexageſima quarta*, & *ſexageſima quinta*. TAB. XI.

12. *De Tridente.*

In ſecundo Æquationum Caſu habebatur Æquatio $xy = ax^3 + bxx + cx + d$. Et Figura in hoc Caſu habet quatuor crura infinita, quorum duo ſunt Hyperbolica circa Aſymptoton A G (*Fig.* 76.) in contrarias partes tendentia, & duo Parabolica convergentia, & cum prioribus ſpeciem Tridentis ferè efformantia. Eſtque hæc Figura Parabola illa, per quam CARTESIUS Æquationes ſex Dimenſionum conſtruxit. Hæc eſt igitur *Species ſexageſima ſexta*.

13. *De Parabolis quinque divergentibus.*

In Tertio Caſu Æquatio erat $yy = ax^3 + bxx + cx + d$, & Parabolam deſignat, cujus crura divergunt ab invicem, & in contrarias partes infinitè progrediuntur. Abſciſſa A B eſt ejus Diameter, & Species ejus ſunt quinque ſequentes. TAB. XII.

Si Æquationis $ax^3 + bxx + cx + d = 0$, Radices omnes A τ, A T, A t ſunt reales & inæquales, Figura eſt Parabola divergens Campaniformis cum *Ovali* ad verticem (*Fig.* 74. 75.). Et *Species* eſt *ſexageſima ſeptima*.

Si Radices duæ ſunt æquales, Parabola prodit, vel *Nodata* contingendo Ovalem (*Fig.* 77.), vel *Punctata*, ob Ovalem infinitè parvam (*Fig.* 78.). Quæ duæ *Species* ſunt *ſexageſima octava*, & *ſexageſima nona*.

Si tres Radices ſunt æquales, Parabola erit *Cuſpidata* in Vertice (*Fig.* 80.

TAB.XI. (*Fig.* 80.) Et hæc eſt Parabola *Neiliana*, quæ vulgo *Semicubica* dicitur. Et eſt *Species ſeptuageſima*.

Si Radices duæ ſunt impoſſibiles, habetur Parabola *Pura* campaniformis (*Fig.* 78. 79.) *Speciem ſeptuageſimam primam* conſtituens.

14. *De Parabolâ Cubicâ.*

In quarto Caſu Æquatio erat $y = ax^3 + bxx + cx + d$, & hæc Æquatio Parabolam deſignat, quæ crura habet contraria; & *Cubica* dici ſolet (*Fig.* 81.) Et ſic *Species* omnino ſunt *ſeptuaginta duæ*.

V.

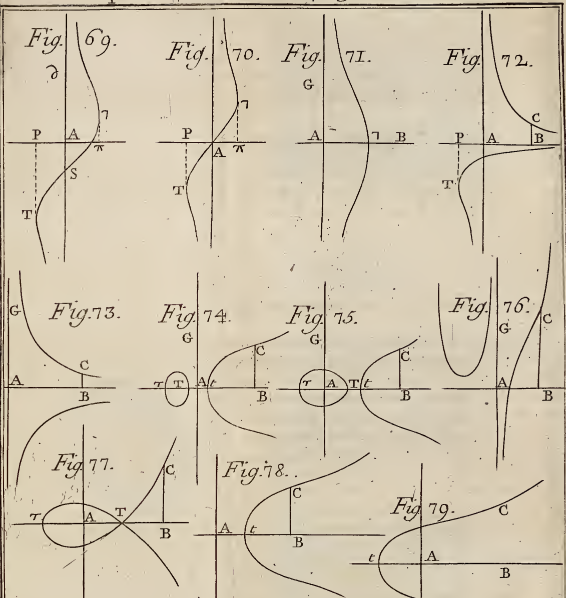
Geneſis Curvarum per Umbras.

Si in Planum infinitum à Puncto lucido illuminatum Umbræ Figurarum projiciantur, Umbræ Sectionum conicarum ſemper erunt Sectiones conicæ; eæ Curvarum ſecundi Generis ſemper erunt Curvæ ſecundi Generis; eæ Curvarum tertii Generis ſemper erunt Curvæ tertii Generis, & ſic deinceps in infinitum.

Et, quemadmodum Circulus, Umbram projiciendo, generat Sectiones omnes conicas, ſic Parabolæ quinque divergentes Umbris ſuis generant & exhibent alias omnes ſecundi Generis Curvas; & ſic Curvæ quædam ſimpliciores aliorum Generum inveniri poſſunt, quæ alias omnes eorundem Generum Curvas Umbris ſuis à Puncto lucido in Planum projectis formabunt.

De Curvarum Punctis duplicibus.

Diximus Curvas ſecundi Generis à Lineâ rectâ in Punctis tribus ſecari poſſe. Horum duo nonnunquam coincidunt. Ut, cùm Recta per Ovalem infinitè parvam tranſit; vel per concurſum duarum partium Curvæ ſe mutuò ſecantium, vel in Cuſpidem coeuntium, duci-


Fig. 69.
P
A
S
T
Fig. 70.
P
A
T
Fig. 71.
G
A
B
Fig. 72.
C
P
A
B
T
Fig. 73.
G
C
A
B
Fig. 74.
G
C
T
A
t
B
Fig. 75.
G
C
A
T
t
B
Fig. 76.
G
C
A
B
Fig. 77.
C
A
T
B
Fig. 78.
C
A
t
B
Fig. 79.
C
t
A
B
Fig. 80.
C
A
B
Fig. 81.
C
G
A
B

ducitur. Et, si quando Rectæ omnes in plagam cruris alicujus infiniti tendentes Curvam in unico tantùm Puncto secant, (ut fit in Ordinatis Parabolæ *Cartesianæ*, & Parabolæ cubicæ, nec non in Rectis Abscissæ Hyperbolismorum Hyperbolæ, & Parabolæ parallelis) concipiendum est, quòd Rectæ illæ per alia duo Curvæ Puncta ad infinitam distantiam sita (ut ita dicam) transeunt. Hujusmodi intersectiones duas coincidentes, sive ad finitam sint distantiam sive ad infinitam, vocabimus *Punctum Duplex*. Curvæ autem, quæ habent Punctum Duplex describi possunt per sequentia Theoremata.

V I.

De Curvarum Descriptione Organicâ.

THEOR. I.

Si (*Fig.* 82.) Anguli duo magnitudine dati PAD, PBD, circa Polos positione datos A, B, rotentur, & eorum crura AP, BP, concursu suo P percurrant Lineam rectam; crura duo reliqua AD, BD concursu suo D describent Sectionem conicam per Polos A, B, transeuntem: præterquàm ubi Linea illa recta transit per Polorum alterutrum A vel B, vel Anguli BAD, ABD simul evanescunt, quibus in casibus Punctum D describet Lineam rectam. TAB. XII.

THEOR. II.

Si (*Fig.* 83.) crura AP, BP concursu suo P percurrant Sectionem conicam per Polum alterutrum A transeuntem, crura duo reliqua AD, BD concursu suo D describent Curvam secundi Generis per Polum alterum B transeuntem, & Punctum duplex habentem in Polo primo A, per quem Sectio conica transit: præterquàm ubi Anguli BAD, ABD simul evanescunt, quo casu Punctum D describet aliam Sectionem conicam per Polum A transeuntem.

THEOR. III.

At, si Sectio Conica, quam Punctum P percurrit transeat per neutrum Polorum A, B, (*Fig.* 84.) Punctum D describet Curvam secundi, vel tertii generis Punctum duplex habentem. Et Punctum illud duplex in concursu crurum describentium, A D, B D invenietur, ubi Anguli B A P, A B P simul evanescunt. Curva autem descripta secundi erit Generis, si Anguli B A D, A B D simul evanescunt; alias erit tertii Generis, & alia duo habebit Puncta duplicia in Polis A & B.

TAB. XII.

Sectionum Conicarum descriptio per data quinque Puncta.

Jam Sectio conica determinatur ex datis ejus Punctis quinque, & per eadem sic describi potest. Dentur (*Fig.* 85.) ejus Puncta quinque A, B, C, D, E. Jungantur eorum tria quævis A, B, C, & Trianguli A B C rotentur Anguli duo quivis C A B, C B A circa Vertices suos A, & B; &, ubi crurum A C, B C intersectio C successivè applicatur ad Puncta duo reliqua D, E, incidat intersectio crurum reliquorum A B & B A in Puncta P & Q. Agatur & infinitè producatur Recta P Q, & Anguli mobiles ita rotentur, ut intersectio crurum A B, B A percurrat Rectam P Q, & crurum reliquorum intersectio C describet propositam Sectionem conicam per Theorema primum.

Curvarum secundi Generis Punctum duplex habentium Descriptio per data septem Puncta.

Curvæ omnes secundi Generis Punctum Duplex habentes determinantur ex datis earum Punctis septem, quorum unum est Punctum illud duplex, & per eadem Puncta sic describi possunt. Dentur (*Fig.* 86.) Curvæ describendæ Puncta quælibet septem A, B, C, D, E, F, G, quorum A est Punctum Duplex. Jungantur Punctum A, & alia duo quævis è Punctis, puta B, & C; & Trianguli

Fig. 82.

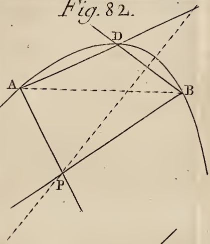


Fig. 83.

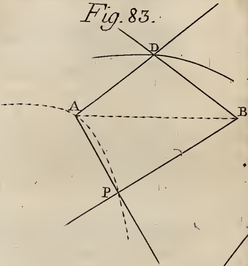


Fig. 84.

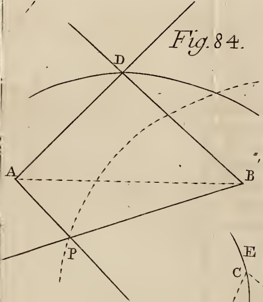


Fig. 85.

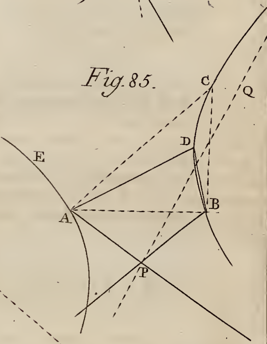
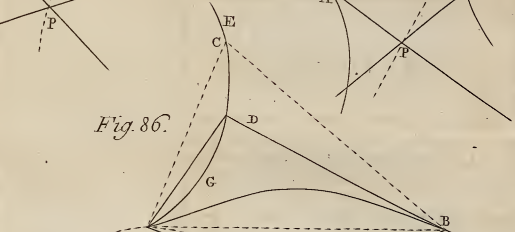


Fig. 86.



guli ABC rotetur tum Angulus CAB circa Verticem suum A, tum Angulorum reliquorum alteruter ABC circa Verticem suum B. Et, ubi crurum AC, BC concursus C successivè applicatur ad Puncta quatuor reliqua D, E, F, G, incidat concursus crurum reliquorum AB, & BA in Puncta quatuor P, Q, R, S. Per Puncta illa quatuor & quintum A describatur Sectio conica; & Anguli præfati CAB, CBA ita rotentur, ut crurum AB, BA concursus percurrat Sectionem illam conicam, & concursus reliquorum crurum AC, BC describet Curvam propositam per Theorema secundum.

Si, vice Puncti C datur positione Recta BC, quæ Curvam describendam tangit in B. Lineæ AD, AP coincident, & vice Anguli DAP habebitur Linea recta circa Polum A rotanda.

Si Punctum duplex A infinitè distat debebit Recta ad plagam Puncti illius perpetuò dirigi, & motu parallelo ferri interea dum Angulus ABC circa Polum B rotatur.

Describi etiam possunt hæ Curvæ paulò aliter per Theorema tertium, sed Descriptionem simpliciorem posuisse sufficit.

Eâdem Methodo Curvas tertii, quarti, & superiorum Generum describere licet, non omnes quidem, sed quotquot ratione aliquâ commodâ per motum localem describi possunt. Nam, Curvam aliquam secundi, vel superioris, generis Punctum duplex non habentem commodè describere Problema est inter difficiliora numerandum.

VII.

Constructio Æquationum per Descriptionem Curvarum.

Curvarum usus in Geometriâ est, ut per earum intersectiones

Problemata solvantur. Proponatur Æquatio construenda Dimensionum novem.

$$x^9 * + bx^7 + cx^6 + dx^5 + ex^4 + fx^3 + gxx + hx + k = 0.$$
$$+ m.$$

Ubi b, c, d, &c. significant Quantitates quasvis datas signis suis; $+$ & $-$ affectas. Assumatur Æquatio ad Parabolam cubicam $x^3 = y$, & Æquatio prior, scribendo y pro x^3, evadet

$$y^3 + bxyy + cyy + dxxy + exy + my + fx^3 + gxx + hx + k = 0.$$

Æquatio ad Curvam aliam secundi Generis. Ubi m, vel f deesse potest, vel pro lubitu assumi. Et per harum Curvarum descriptiones, & intersectiones dabuntur Radices Æquationis construendæ. Parabolam cubicam semel describere sufficit.

Si Æquatio construenda per defectum duorum Terminorum ultimorum hx, & k reducatur ad septem Dimensiones, Curva altera, delendo m, habebit Punctum Duplex in principio Abscissæ, & inde facilè describi potest, ut supra.

Si Æquatio construenda per defectum Terminorum trium ultimorum $gxx + hx + k$ reducatur ad sex Dimensiones, Curva altera, delendo f, evadet Sectio conica.

Et, si per defectum sex ultimorum Terminorum, Æquatio construenda reducatur ad tres Dimensiones, incidetur in constructionem *Wallisianam* per Parabolam cubicam & Lineam rectam.

Construi etiam possunt Æquationes per Hyperbolismum Parabolæ cum Diametro. Ut, si construenda sit hæc Æquatio Dimensionum novem Termino penultimo carens,

$$\begin{array}{l} a + cxx + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + hx^7 + kx^8 + lx^9 = 0; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + m \end{array}$$

Assumatur Æquatio ad Hyperbolismum illum $xxy = 1$, & scribendo y pro $\frac{1}{xx}$, Æquatio construenda vertetur in hanc

$$ay^3 + cyy + dxyy + ey + fxy + m + g + hx + kxx + lx^3 = 0;$$

quæ Curvam secundi Generis designat, cujus descriptione Problema solvetur. Et Quantitatum m, ac g alterutra hic deesse potest, vel pro lubitu assumi.

Per Parabolam cubicam & Curvas tertii Generis construuntur etiam Æquationes omnes Dimensionum non plusquam duodecim, & per eandem Parabolam & Curvas quarti Generis construuntur omnes Dimensionum non plusquam quindecim; Et sic deinceps in infinitum. Et Curvæ illæ tertii, quarti, & superiorum Generum describi semper possunt inveniendo eorum Puncta per Geometriam planam. Ut si construenda sit Æquatio

$$\begin{array}{l} x^{12} * + ax^{10} + bx^9 + cx^8 + dx^7 + ex^6 + fx^5 \\ \quad + gx^4 + hx^3 + ixx + kx + l = 0, \end{array}$$

& descripta habeatur Parabola cubica; sit Æquatio ad Parabolam illam cubicam $x^3 = y$, & scribendo y pro x^3, Æquatio construenda vertetur in hanc

$$\begin{array}{lllll} y^4 + & axy^3 + & cxxyy + & fxxy + & ixx = 0, \\ & + b & + dx & + gx & + kx \\ & & + e & + h & + l \end{array}$$

quæ eſt Æquatio ad Curvam tertii Generis, cujus deſcriptione Problema ſolvetur. Deſcribi autem poteſt hæc Curva inveniendo ejus Puncta per Geometriam planam, propterea quod indeterminata Quantitas x non niſi ad duas Dimenſiones aſcendit.

OPUSCULUM V.

ISAACI

NEWTONI

METHODUS DIFFERENTIALIS

Edita LONDINI 1711.

ISAACI NEWTONI METHODUS DIFFERENTIALIS.

PROP. I.

S*I Figuræ curvilineæ Abſciſſa componatur ex Quantitate quâvis datâ* A, *& Quantitate indeterminatâ* x, *& Ordinata conſtet ex datis quotcunque Quantitatibus* b, c, d, e, *&c. in totidem Terminos hujus Progreſſionis geometricæ* x, x^2, x^3, x^4, *&c. reſpectivè ductis, & ad Abſciſſæ Puncta totidem data erigantur Ordinatim applicatæ: dico quòd Ordinatarum Differentiæ primæ dividi poſſint per earum Intervalla, & Differentiarum ſic diviſarum Differentiæ dividi poſſint per Ordinatarum binarum Intervalla, &*

harum Differentiarum sic divisarum Differentiæ dividi possint per Ordinatarum ternarum Intervalla, & sic deinceps in infinitum.

Etenim, si pro Abscissæ parte indeterminatâ x ponantur Quantitates quævis datæ p, q, r, s, t, &c. successivè, & ad Abscissarum sic datarum Terminos erigantur Ordinatæ α, β, γ, δ, ε, &c. Hæ Abscissæ, & Ordinatæ, & Ordinatarum Differentiæ divisæ per Abscissarum Differentias, (quæ utique sunt Ordinatarum Intervalla,) & Quotorum Differentiæ divisæ per Ordinatarum alternarum Differentias, & sic deinceps, exhibentur per Tabulam sequentem.

Abscissæ	Ordinatæ
$A+p$	$A+bp+cp^2+dp^3+ep^4=\alpha$
$A+q$	$A+bq+cq^2+dq^3+eq^4=\beta$
$A+r$	$A+br+cr^2+dr^3+er^4=\gamma$
$A+s$	$A+bs+cs^2+ds^3+es^4=\delta$
$A+t$	$A+bt+ct^2+dt^3+et^4=\varepsilon$
Divisor. Diff. Ord.	**Quoti per Divisionem prodeuntes**
$p-q)\ \alpha-\beta$	$b+c\times\overline{p+q}+d\times\overline{pp+pq+qq}+e\times\overline{p^3+p^2q+pq^2+q^3}=\zeta$
$q-r)\ \beta-\gamma$	$b+c\times\overline{q+r}+d\times\overline{qq+qr+rr}+e\times\overline{q^3+q^2r+qr^2+r^3}=\eta$
$r-s)\ \gamma-\delta$	$b+c\times\overline{r+s}+d\times\overline{rr+rs+ss}+e\times\overline{r^3+r^2s+rs^2+s^3}=\theta$
$s-t)\ \delta-\varepsilon$	$b+c\times\overline{s+t}+d\times\overline{ss+st+tt}+e\times\overline{s^3+s^2t+st^2+t^3}=\varkappa$
$p-r)\ \zeta-\eta$	$c+d\times\overline{p+q+r}+e\times\overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}=\lambda$
$q-s)\ \eta-\theta$	$c+d\times\overline{q+r+s}+e\times\overline{qq+qr+rr+qs+rs+ss}=\mu$
$r-t)\ \theta-\varkappa$	$c+d\times\overline{r+s+t}+e\times\overline{rr+rs+ss+rt+st+tt}=\nu$
$p-s)\ \lambda-\mu$	$d+e\times\overline{p+q+r+s}=\xi$.
$q-t)\ \mu-\nu$	$d+e\times\overline{q+r+s+t}=\pi$.
$p-t)\ \xi-\pi$	$e=\sigma$.

P R O P. II.

Iisdem positis, & quòd numerus Terminorum b, c, d, e, *&c. sit finitus, dico quòd Quotorum ultimus æqualis erit ultimo Terminorum* b, c, d, e, *&c.*, *& quòd per Quotos reliquos dabuntur Termini reliqui* b, c, d, e, *&c. & his datis dabitur Linea cur-*

væ

va generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium Terminos transibit.

Etenim in Tabulâ superiore Quotus ultimus σ æqualis erat Termino ultimo e. Et hic Terminus ductus in Summam datam $\overline{p+q+r+s}$, & ablatus de Quoto ξ relinquit Terminum penultimum d. Et Quantitates jam datæ $d \times \overline{p+q+r} + e \times \overline{pp+pq+qq+pr+qr+rr}$, si auferantur de Quoto λ, relinquunt Terminorum antepenultimum c. Et Quantitates jam datæ $c \times \overline{p+q} + d \times \overline{pp+pq+qq} + e \times \overline{p^3+ppq+pqq+q^3}$, si auferantur de Quoto ζ, relinquunt Terminum b. Et simili computo si plures essent Termini, colligerentur omnes per Quotorum Ordines totidem. Deinde Quantitates datæ $bp+cpp+dp^3+ep^4$, si subducantur de Ordinatâ primâ α, relinquunt Abscissæ Terminum primum A. Et Quantitas $A+bx+cx^2+dx^3+ex^4+$ &c. est Ordinata Curvæ generis Parabolici, quæ per Ordinatarum omnium datarum Terminos transibit, existente Abscissâ $A+x$.

Ex his Propositionibus, quæ sequuntur facilè colligi possunt.

PROP. III.

Si (Fig. 1.) *Recta aliqua* A A9 *in æquales quotcunque partes* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad Puncta Divisionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum Terminos* B, B2, B3, *&c. transibit.*

Erectarum AB, A2B2, A3B3, &c. quære Differentias primas, b, $b2$, $b3$, &c.; secundas c, $c2$, $c3$, &c.; tertias d, $d2$, $d3$, &c; & sic deinceps usquedum veneris ad ultimam Differentiam, quæ hìc sit i.

Tunc, incipiendo ab ultimâ Differentiâ, excerpe medias Differentias in alternis Columnis, vel Ordinibus Differentiarum, & arithmetica Media inter duas medias reliquarum, Ordine pergendo usque ad Seriem primorum Terminorum AB, A2B2, A3B3, &c. sint hæc k, l, m, n, o, p, q, r, s, &c. quorum ultimus si-

gnificet ultimam Differentiam; penultimus Medium arithmeticum inter duas penultimas differentias; antepenultimus medium trium antepenultimarum Differentiarum, & sic deinceps usque ad primum, quod erit vel medius Terminorum A, A2, A3, &c. vel arithmeticus medius inter duos medios. Prius accidit, ubi numerum Terminorum A, A2, A3, &c. est impar; posterius ubi par.

CAS. I.

In Casu priori, sit A5B5 iste medius Terminus; hoc est, A5B5 $= k$; $\frac{b4+b5}{2} = l$; $c4 = m$; $\frac{d3+d4}{2} = n$; $e3 = o$, $\frac{f2+f3}{2} = p$; $g2 = q$; $\frac{h+h2}{2} = r$; $i = s$: Et, erectâ Ordinatim applicatâ PQ, dic A5P $= x$; & duc Terminos hujus Progressionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{xx-1}{3x} \times \frac{x}{4} \times \frac{xx-4}{5x} \times \frac{x}{6} \times \frac{xx-9}{7x} \times \frac{x}{8} \times \frac{xx-16}{9x} \times \frac{x}{10} \times \frac{xx-25}{11x} \times \frac{x}{12} \times \frac{xx-36}{13x}$ &c. in se continuò; & orientur Termini $1.\ x.\ \frac{xx}{2}.\ \frac{x^3-x}{6}.\ \frac{x^4-xx}{24}.\ \frac{x^5-5x^3+4x}{120}.\ \frac{x^6-5x^4+4xx}{720}.\ \frac{x^7-14x^5+49x^3-36x}{5040}.$ &c., per quos si Termini Seriei k, l, m, n, o, p, &c. respectivè multiplicentur, Aggregatum Factorum $k + xl + \frac{xx}{2} m + \frac{x^3-x}{6} n + \frac{x^4-xx}{24} o + \frac{x^5-5x^3+4x}{120} \times p +$ &c. erit longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Casu posteriori, sint A4B4, A5B5 duo medii Termini, hoc est, sit $\frac{A4B4 + A5B5}{2} = k$; $b4 = l$; $\frac{c3+c4}{2} = m$; $d3 = n$: $e2 + e3 = o$; $f2 = p$; $\frac{g+g2}{2} = q$; & $h = r$. Et erectâ Ordinatim applicatâ PQ, biseca A4A5 in O, & dicto OP $= x$,

duc

duc Terminos hujus Progressionis $1 \times \frac{x}{1} \times \frac{xx - \frac{1}{4}}{2x} \times \frac{x}{3} \times \frac{xx - \frac{9}{4}}{4x} \times \frac{x}{5} \times \frac{xx - \frac{25}{4}}{6x} \times \frac{x}{7} \times \frac{xx - \frac{49}{4}}{8x}$, &c. in se continuò; & orientur Termini $1.\ x.\ \frac{4xx - 1}{8}.\ \frac{4x^3 - x}{24}.\ \frac{16x^4 - 40xx + 9}{384}.$ &c., per quos si Termini Seriei k, l, m, n, o, p, q, &c. respectivè multiplicentur, Aggregatum Factorum $k + xl + \frac{4xx - 1}{8}m + \frac{4x^3 - x}{24} \times n + \frac{16x^4 - 40xx + 9}{384}o +$ &c. erit longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

Sed hìc notandum est, quòd Intervalla AA2, A2A3, A3A4, &c. hìc supponantur esse Unitates, & quòd Differentiæ colligi debent auferendo inferiores Quantitates de superioribus, A2B2 de AB; A3B3 de A2B2; $b2$ de b, &c., & faciendo, ut sint AB — A2B2 $= b$; A2B2 — A3B3 $= b2$; $b - b2 = c$; &c., adeóque, quandò Differentiæ illæ hoc modò prodeunt negativæ, signa earum mutanda sunt.

PROP. IV.

Si (Fig. 2.) *Recta aliqua in partes quotcunque inæquales* AA2, A2A3, A3A4, A4A5, *&c. dividatur, & ad Puncta Divisionum erigantur parallelæ* AB, A2B2, A3B3, *&c. Invenire Curvam geometricam generis Parabolici, quæ per omnium erectarum Terminos* B, B2, B3, *&c. transibit.*

Sunto Puncta data B, B2, B3, B4, B5, B6, B7, &c. & ad Abscissam quamvis AA7 demitte Ordinatas perpendiculariter BA, B2A2, &c.

Et fac $\frac{AB - A2B2}{AA2} = b$; $\frac{A2B2 - A3B3}{A2A3} = b2$; $\frac{A3B3 - A4B4}{A3A4} = b3$;

$=b3; \frac{A4B4 - A5B5}{A4A5} = b4; \frac{A5B5 - A6B6}{A5A6} = b5; \frac{A6B6 - A7B7}{A6A7} = b6; \frac{-A7B7 - A8B8}{A7A8} = b7.$

Deinde, $\frac{b - b2}{AA3} = c; \frac{b2 - b3}{A2A4} = c2; \frac{b3 - b4}{A3A5} = c3$; &c.

Tunc, $\frac{c - c2}{AA4} = d; \frac{c2 - c3}{A2A5} = d2; \frac{c3 - c4}{A3A6} = d3$; &c.

Et, $\frac{d - d2}{AA5} = e; \frac{d2 - d3}{A2A6} = e2; \frac{d3 - d4}{A3A7} = e3$; &c.

Sic pergendum eſt ad ultimam Differentiam.

Differentiis ſic collectis, & diviſis per Intervalla Ordinatim applicatarum; in alternis earum Columnis, ſive Seriebus, vel Ordinibus, excerpe medias, incipiendo ab ultimâ, & in reliquis Columnis excerpe Media arithmetica inter duas medias, pergendo uſque ad Seriem primorum Terminorum, AB, A2B2, &c. Sunto hæc k, l, m, n, o, p, q, r, &c., quorum ultimus Terminus ſignificet ultimam Differentiam; penultimus Medium arithmeticum inter duas penultimas; antepenultimus mediam trium antepenultimarum, &c. Et primus k erit media Ordinatim applicata, ſi numerus datorum Punctorum eſt impar; vel medium arithmeticum inter duas medias, ſi numerus eorum eſt par.

CAS. I.

In Caſu priori, ſit A4B4 iſta media Ordinatim applicata, hoc eſt ſit $A4B4 = k$; $\frac{b3 + b4}{2} = l$; $c3 = m$; $\frac{d2 + d3}{2} = n$; $e2 = o$; $\frac{f + f2}{2} = p$; $g = q$. Et erectâ Ordinatim applicatâ PQ, & in Baſi AA5 ſumpto quovis Puncto O, dic $OP = x$, & duc in ſe gradatim Terminos hujus Progreſſionis

$$1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - \frac{OA3 + OA5}{2}} \times \frac{\overline{x - OA3} \times \overline{x - OA5}}{x - \frac{1}{2}\,\overline{OA3 + OA5}} \times \overline{x - \frac{OA2 + OA6}{2}} \times \text{\&c.}$$

& ortam Progreſſionem aſſerva; vel, quod

quod perinde eſt, duc Terminos hujus Progreſſionis

$1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA5} \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA6} \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA7} \times$ &c. in ſe gradatim, & Terminos exinde ortos duc reſpectivè in Terminos hujus Progreſſionis

$1.\ x - \frac{+OA3+OA5}{2}.\ x - \frac{+OA2+OA6}{2}.\ x - \frac{+OA+OA7}{2},$ &c., & orientur Termini intermedii, totâ Progreſſione exiſtente

$1.\ x - OA4.\ xx - \frac{+OA3+2OA4+OA5}{2}x + \frac{OA3+OA5}{2} \times OA4$, &c.

Vel. dic $OA = \alpha$; $OA2 = \beta$; $OA3 = \gamma$; $OA4 = \delta$; $OA5 = \varepsilon$; $OA6 = \zeta$; $OA7 = \eta$; $\frac{OA3+OA5}{2} = \theta$; $\frac{OA2+OA6}{2} = \varkappa$; $\frac{OA+OA7}{2} = \lambda$. Et ex Progreſſione

$1 \times \overline{x-\delta} \times \overline{x-\gamma} \times \overline{x-\varepsilon} \times \overline{x-\beta} \times \overline{x-\zeta} \times \overline{x-\alpha} \times \overline{x-\eta}$ &c. collige Terminos, quibus multiplicatis per $1.\ x-\theta,\ x-\varkappa,\ x-\lambda$, &c. collige alios Terminos intermedios, totâ Serie prodeunte $1,\ x-\delta,\ xx - \overline{\delta+\theta}x + \delta\theta,\ x^3 - \overline{\delta+2\theta}xx + \overline{\gamma\varepsilon+2\delta\theta}x - \gamma\delta\varepsilon$, &c., per cujus Terminos multiplica Series k, l, m, n, o, &c. Et Aggregatum Productorum $k + \overline{x-\delta} \times l + \overline{xx - \overline{\delta+\theta}x + \delta\theta} \times m +$ &c. erit longitudo Ordinatim applicatæ PQ.

CAS. II.

In Caſu poſteriori, ſint A4B4, A5B5 duæ mediæ Ordinatim applicatæ, hoc eſt, $\frac{A4B4+A5B5}{2} = k$; $b4 = l$; $\frac{c3+c4}{2} = m$; $d3 = n$; $\frac{e2+e3}{2} = o$; $f2 = p$, &c. Et alternorum k, m, o, q, &c. Coefficientes orientur ex Multiplicatione Terminorum hujus Progreſſionis in ſe $1 \times \overline{x - OA4} \times \overline{x - OA5} \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA6} \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA7} \times$

$\overline{x - OA} \times \overline{x - OA8}$, &c. Et reliquorum Coefficientes ex Multiplicatione horum per Terminos hujus Progressionis

$x - \frac{+OA4 + OA5}{2}$, $x - \frac{+OA3 + OA6}{2}$, $x - \frac{+OA2 + OA7}{2}$,

$x - \frac{+OA + OA8}{2}$, &c. Hoc est, erit $k + \overline{x - \frac{+OA4 + OA5}{2}} \times$

$\overline{l + xx - \overline{OA4 + OA5}\, x + OA4 \times OA5} \times m$, &c. Ordinatim applicata PQ, vel PQ

$$\begin{array}{llllllll} = k + & x & \times\, l + & x & \times\; + x \times m + & x & \times\; + x \times\; + x \times n, & \text{\&c.} \\ & -\frac{1}{2}OA4 & & -OA4 & -OA5 & -OA4 & -OA5 & -\frac{1}{2}OA3 \\ & -\frac{1}{2}OA5 & & & & & & -\frac{1}{2}OA6 \end{array}$$

Sive dic $x - \frac{+OA4 + OA5}{2} = \pi$, $\overline{x - OA4} \times \overline{x - OA5} = \varrho$,

$\varrho \times \overline{x - \frac{+OA3 + OA6}{2}} = \sigma$, $\varrho \times \overline{x - OA3} \times \overline{x - OA6} = \tau$,

$\tau \times \overline{x - \frac{+OA2 + OA7}{2}} = \upsilon$, $\tau \times \overline{x - OA2} \times \overline{x - OA7} = \phi$,

$\phi \times \overline{x - \frac{+OA + OA8}{2}} = \chi$, $\phi \times \overline{x - OA} \times \overline{x - OA8} = \psi$,

Et erit $k + \pi l + \varrho m + \sigma n + \tau o + \upsilon p + \phi q + \chi r + \psi s = PQ$.

PROP. V.

Datis aliquot Terminis Seriei cujuscunque ad data Intervalla dispositis, invenire Terminum quemvis intermedium quamproximè.

Ad Rectam positione datam erigantur Termini dati in dato Angulo, interpositis datis Intervallis, & per eorum Puncta extima, per Propositiones præcedentes, ducatur Linea curva generis Parabolici. Hæc enim continget Terminos omnes intermedios per Seriem totam.

PROP.

PROP. VI.

Figuram quamcunque curvilineam quadrare quamproximè, cujus Ordinatæ aliquot inveniri possunt.

Per Terminos Ordinatarum ducatur Linea curva generis Parabolici ope Propositionum præcedentium. Hæc enim Figuram terminabit, quæ semper quadrari potest, & cujus Area æquabitur Areæ Figuræ propositæ quamproximè,

SCHOLIUM.

Utiles sunt hæ Propositiones ad Tabulas construendas per Interpolationem Serierum, ut & ad solutiones Problematum, quæ à Quadraturis Curvarum dependent, præsertim si Ordinatarum Intervalla, & parva sint, & æqualia inter se, & Regulæ computentur, & in usum reserventur pro dato quocunque numero Ordinatarum. Ut, si quatuor sint Ordinatæ ad æqualia Intervalla sitæ, sit A summa primæ, & quartæ; B summa secundæ, & tertiæ; & R Intervallum inter primam, & quartam; & Ordinata nova in medio omnium erit $\frac{9B - A}{16}$, & Area tota inter primam & quartam erit $\frac{A + 3B}{8}R$.

Et nota, quòd ubi Ordinatæ stant ad æquales ab invicem distantias, sumendo Summas Ordinatarum, quæ ab Ordinatâ mediâ hinc inde æqualiter distant, & duplum Ordinatæ mediæ, componitur Curva nova, cujus Area per pauciores Ordinatas determinatur, & æqualis est Areæ Curvæ prioris, quam invenire oportuit. Quinetiam, si pro Ordinatis novis sumantur Summa Ordinatæ primæ, & secundæ; & summa tertiæ, & quartæ; & summa quintæ, & sextæ; & sic deinceps; vel si sumantur Summa trium primarum Ordinatarum, & Summa trium proximarum, & Summa trium, quæ sunt deinceps; vel si sumantur Summæ quaternarum Ordinatarum, vel Summæ quinarum: Area Curvæ novæ æqualis erit Areæ Curvæ

 primò

primò propositæ. Et sic, habitis Curvæ quadrandæ Ordinatis quotcunque, Quadratura ejus ad Quadraturam Curvæ alterius per pauciores Ordinatas reducetur.

Per data verò Puncta quotcunque non solùm curvæ Lineæ generis Parabolici, sed etiam Curvæ aliæ innumeræ diversorum generum duci possunt.

Sunto (*Fig.* 3.) CDE, FGH Curvæ duæ Abscissam habentes communem AB, & Ordinatas in eâdem Rectâ jacentes BD, BG; & Relatio inter has Ordinatas definiatur per Æquationem quamcunque. Dentur Puncta quotcunque, per quæ Curva CDE transire debet, & per Æquationem illam dabuntur Puncta totidem nova, per quæ Curva FGH transibit. Per Propositiones superiores describatur Curva FGH generis Parabolici, quæ per Puncta illa omnia nova transeat, & per Æquationem eandem dabitur Curva CDE, quæ per Puncta omnia primò data transibit.

OPUSCULA VI. & VII.

ISAACI NEWTONI SOLUTIONES PROBLEMATUM QUORUNDAM,

EDITÆ

IN TRANSAC. PHILOSOPH.

Menſ. Jan. &c., Ann. 1697.

Num. 224. pag. 384.
Num. 225. pag. 424.
& Ann. 1716.
Num. 347. 399.

ART. I.

ISAACI NEWTONI EPISTOLA

MISSA AD

PRÆNOBILEM VIRUM

D. CAROLUM MONTAGUE

Armigerum, Scacarii Regii apud Anglos Cancellarii, & Societatis Regiæ Præsidem, ubi solvuntur duo Problemata Mathematica

A

JOHANNE BERNOULLIO

Math. Celeber. proposita.

Accepi, Vir Amplissime, hesterno die duo Problematum à JOHANNE BERNOULLIO Mathematicorum acutissimo exemplaria, *Groningæ* edita in hæc verba

Acutissimis qui toto Orbe florent Mathematicis S. P. D.

JOHANNES BERNOULLI

MATH. P. P.

CUM compertum habeamus, vix quicquam esse, quod magis excitet generosa ingenia ad moliendum quod conducit augendis Scientiis, quàm difficilium pariter & utilium Quæstionum propositio-

positionem; quarum enodatione, tanquam singulari, si qua alia via, ad nominis claritatem perveniant, sibíque apud Posteritatem æterna extruant monumenta: Sic me nihil gratius Orbi Mathematico facturum speravi, quàm si, imitando exemplum tantorum Virorum MERSENNI, PASCALII, FERMATII, præsertim recentis illius Anonymi Ænigmatistæ *Florentini*, * aliorúmque, qui idem ante me fecerunt, præstantissimis hujus ævi Analystis proponerem aliquod Problema, quo, quasi lapide Lydio, suas Methodos examinare, vires intendere, &, si quid invenirent, nobiscum communicare possent; ut quisque suas exinde promeritas laudes à nobis, publicè id profitentibus, consequeretur.

Factum autem illud est ante semestre in *Actis Lips. m. Jun.* pag. 269, ubi tale Problema proposui, cujus utilitatem cum jucunditate conjunctam videbunt omnes, qui cum successu ei se applicabunt. Sex mensium spatium à primâ publicationis die Geometris concessum est, intra quod, si nulla Solutio prodiret in lucem, me meam exhibiturum promisi. Sed ecce elapsus est terminus, & nihil Solutionis comparuit; nisi quod Celeb. LEIBNITIUS, de profundiore Geometriâ præclarè meritus, me per litteras certiorem fecerit, se jam feliciter dissolvisse nodum pulcherrimi hujus, uti vocabat, & inauditi antea Problematis; insimúlque humaniter rogavit, ut præstitutum limitem ad proximum Pascha extendi paterer; quo interea apud Gallos, Italósque, idem illud publicari posset, nullúsque adeò superesset locus ulli de angustiâ termini querelæ. Quam honestam petitionem non solùm indulsi, sed ipse hanc prorogationem promulgare decrevi; visurus num qui sint, qui nobilem hanc & arduam Quæstionem aggressuri, post longum temporis intervallum, tandem Enodationis compotes fierent. Illorum interim in gratiam, ad quorum manus *Acta Lipsiensia* non perveniunt, propositionem hìc repeto.

PRO-

* *Vincentius* VIVIANI Ann. 1692. Ænigma Geometricum proposuit, de miro opificio Testudinis quadrabilis Hemisphericæ; Videantur *Acta Eruditorum* hujus anni, mense Junio, *pag.* 274. vel Vita VIVIANI in Hist. Acad. Reg. Scient. Paris. Ann. 1703.

PROBLEMA
MECHANICO-GEOMETRICUM
De Lineâ celerrimi descensûs.

Determinare Lineam curvam data duo Puncta, in diversis ab Horizonte distantiis & non in eâdem Rectâ verticali posita, connectentem, super quâ mobile, propriâ gravitate decurrens & à superiori Puncto moveri incipiens, citissimè descendat ad Punctum inferius.

Sensus Problematis hic est: Ex infinitis Lineis, quæ duo illa data Puncta conjungunt, vel ab uno ad alterum duci possunt, eligatur illa, juxta quam, si incurvetur lamina tubi canalísve formam habens, ut ipsi impositus globulus & liberè dimissus, iter suum ab uno Puncto ad alterum emetiatur tempore brevissimo.

Ut verò omnem ambiguitatis ansam præcaveamus; scire B. L. volumus, nos hic admittere Galilæi hypothesin, de cujus veritate, sepositâ resistentiâ, jam nemo est saniorum Geometrarum qui ambigat, *Velocitates, scilicet, acquisitas, Gravium cadentium esse in subduplicatâ Ratione Altitudinum emensarum*; quamquam aliàs nostra solvendi Methodus universaliter ad quamvis aliam hypothesin sese extendat.

Cùm itaque nihil obscuritatis supersit, obnixè rogamus omnes & singulos hujus ævi Geometras, accingant se promtè, tentent, discutiant quicquid in extremo suarum Methodorum recessu absconditum tenent. Rapiat qui potest præmium, quod Solutori paravimus; non quidem auri, non argenti summam, quo abjecta tantùm & mercenaria conducuntur ingenia, à quibus ut nihil laudabile, sic nihil, quod Scientiis fructuosum, expectamus; sed cùm Virtus sibi ipsi sit merces pulcherrima, atque Gloria immensum habeat calcar, offerimus præmium, quale convenit ingenui sanguinis Viro, con-

fertum

sertum ex honore, laude, & plausu; quibus magni nostri Apollinis perspicacitatem, publicè & privatim, scriptis & dictis coronabimus, condecorabimus, & celebrabimus.

Quòd si verò festum Paschatis præterierit, nemine deprehenso, qui Quæsitum nostrum solverit; nos quæ ipsi invenimus publico non invidebimus: Incomparabilis enim LEIBNITIUS Solutiones tum suam, tum nostram, ipsi jam pridem commissam, protinus, ut spero, in lucem emittet; quas si Geometræ, ex penitiori quodam fonte petitas perspexerint, nulli dubitamus, quin angustos vulgaris Geometriæ limites agnoscant, nostráque proin inventa tanto pluris faciant, quanto pauciores eximiam nostram Quæstionem soluturi extiterint, etiam inter illos ipsos, qui per singulares, quas tantoperè commendant, Methodos, interioris Geometriæ latibula non solùm intimè penetrasse, sed etiam ejus pomœria, Theorematibus suis aureis, nemini, ut putabant, cognitis, ab aliis tamen jam longè priùs editis, mirum in modum extendisse gloriantur.

PROBLEMA ALTERUM

PURE GEOMETRICUM

Quod priori subnectimus, & Strenæ loco Eruditis proponimus.

AB EUCLIDIS tempore vel Tyronibus notum est, ductam utcunque à Puncto dato rectam Lineam, à Circuli Peripheriâ ita secari, ut Rectangulum duorum Segmentorum, inter Punctum datum & utramque Peripheriæ partem interceptorum, sit eidem constanti perpetuò æquale. Primus ego ostendi, in eodem *Actorum Jun.* pag. 265, hanc proprietatem infinitis aliis Curvis convenire, illámque adeò Circulo non esse essentialem: Arreptâ hinc occasione, proposui Geometris determinandam Curvam, vel Curvas, in quibus non Rectangulum, sed Solidum sub uno & Quadrato alterius Segmentorum æquetur semper eidem: sed à nemine hactenus solvendi modus prodiit; exhibebimus eum, quandocumque desiderabitur. Quoniam autem non nisi per Curvas transcendentes Quæsito satisfacimus;

ſatisfacimus; en aliud, cujus Solutio per merè algebraicas in noſtrâ eſt poteſtate.

Quæritur Curva ejus proprietatis, ut duo illa Segmenta, ad quamcunque Potentiam datam elevata & ſimul ſumta, faciant ubique unam eandémque Summam.

Caſum ſimpliciſſimum, exiſtente ſcilicet numero Potentiæ 1, ibidem in *Actis*, pag. 266. jam ſolutum dedimus; generalem verò Solutionem, quam etiamnum premimus, Analyſtis eruendam relinquimus.

Dabam Groningæ, ipſis Cal. Jan. 1697.

Hactenus Bernoullius; Problematum verò Solutiones ſunt hujus modi.

A dato Puncto A (*Fig.* 1.) ducatur Recta infinita APCZ Horizonti parallela & ſuper eâdem Rectâ deſcribatur, tum Cyclois quæcunque AQP Rectæ ABC ductæ, & ſi opus ſit, (productæ) occurrens in Puncto Q, tum Cyclois alia ABC, cujus Baſis, & Altitudo ſit ad prioris Baſem & Altitudinem reſpectivè, ut AB ad AQ. Et hæc Cyclois noviſſima tranſibit per Punctum B, & erit curva illa Linea, in quâ Grave à Puncto A ad Punctum B vi Gravitatis ſuæ citiſſimè perveniet. Q. E. I.

PROBLEMA II.

Problema alterum, ſi rectè intellexi, (nam, quæ in *Actis Lipſ.* ab Auctore citantur ad id ſpectantia nondum vidi,) ſic proponi poteſt. Quæritur (*Fig.* 2.) Curva KIL eâ lege, ut ſi Recta PKL à dato quodam Puncto P, ceu Polo, utcunque ducatur, & eidem Curvæ in Punctis duobus K, & L occurrat, Poteſtates duorum ejus Segmentorum PK, & PL à dato illo Puncto P ad occurſus illos ductorum, ſi ſint æquè altæ, [id eſt, vel Quadrata, vel Cubi, vel Quadrato-quadrata, &c:] datam Summam PK*q* + PL*q* vel PK *cub.* + PL *cub*, &c: (in omni Rectæ illius poſitione) conficiant.

SOLUTIO.

Per datum quodvis Punctum A ducatur Recta quævis infinita po-

ſitione data ADB Rectæ mobili PKL occurrens in D, & nominentur AD, x; & PK, vel PL, y; ſintque Q, & R Quantitates ex Quantitatibus quibuſcunque datis, & Quantitate x quomodocunque conſtantes, & Relatio inter x, & y, definiatur per hanc Æquationem $yy + Qy + R = 0$. Et ſi R ſit Quantitas data, Rectangulum ſub Segmentis PK & PL dabitur. Si Q ſit Quantitas data, Summa Segmentorum illorum (ſub ſignis propriis conjunctorum) dabitur. Si $QQ - 2R$ datur, Summa Quadratorum, ($PKq + PLq$,) dabitur. Si $Q^3 - 3QR$ data ſit Quantitas, Summa Cuborum ($PK\,cub. + PL\,cub.$) dabitur. Si $Q^4 - 4QQR + 2RR$ data ſit Quantitas, Summa Quadrato-quadratorum ($PKqq + PLqq$) dabitur. Et ſic deinceps in infinitum. Efficiatur itaque ut R, Q, $QQ - 2R$, $Q3 - 3QR$, &c. datæ ſint Quantitates, & Problema ſolvetur. Q. E. F.

Ad eundem modum Curvæ inveniri poſſunt, quæ tria, vel plura abſcindent Segmenta, ſimiles proprietates habentia. Sit Æquatio $y^3 + Qyy + Ry + S = 0$, ubi Q, R, & S, Quantitates ſignificant ex Quantitatibus quibuſcunque datis, & Quantitate x utcunque conſtantes, & Curva abſcindet Segmenta tria. Et ſi S data ſit Quantitas contentum Solidorum illorum trium dabitur. Si Q ſit Quantitas data Summa trium illorum dabitur. Si $QQ - 2R$ ſit data Quantitas, Summa Quadratorum ex tribus illis dabitur.

OPUS-

OPUSC. V.

Fig. 1.

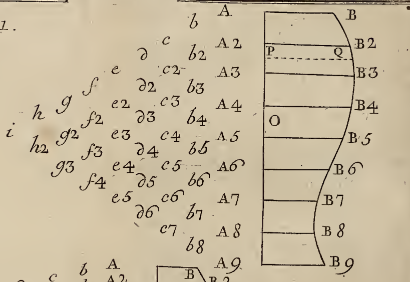


Fig. 2.

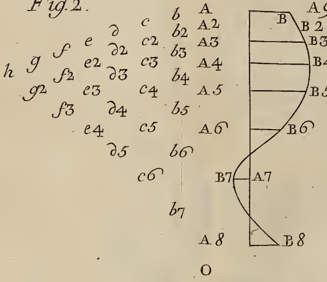
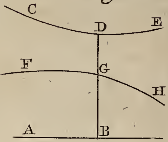


Fig. 3.



OPUSC. VI.

Fig. 1.

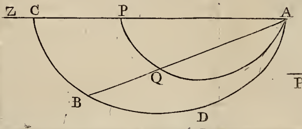
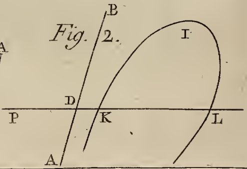


Fig. 2.



OPUSCULUM VI.

ART. II.

De Ratione Temporis, quo Grave labitur per Rectam data duo Puncta conjungentem ad Tempus brevissimum, quo, vi Gravitatis, transit ab horum uno ad alterum per Arcum Cycloidis.

THEOREMA.

Transf. Phil. losf. Menf. Februar. Ann. 1697. Num. 225. pag. 424.

SI (*Fig.* 3. hujus Opuſculi) *in* Cycloide AVD, *cujus Baſis* AD *eſt Horizonti parallela*, *Vertice* V *deorſum ſpectante*, *ex* A *ducatur utcunque Recta* AB Cycloidi *occurrens in* B, *ex quo ducatur Recta* BC *Curvæ* Cycloidis BD *in* B *normalis*, *ad quam*, *ex* A *demittatur perpendicularis Recta* AC. *Dico Tempus*, *quo Grave è quiete cadens ex* A, *vi ſuæ Gravitatis*, *decurrit Rectam* AB, *eſſe ad Tempus*, *quo percurrit Curvam* AVB, *ſicut Recta* AB *ad Rectam* AC.

Per B ducatur BL parallela *Cycloidis* Axi VE; & BK, Baſi AD parallella occurrens Axi in G, &, Circulo ſuper Diametrum EV deſcripto, in F & H; *Cycloidi* denique in K. Ducatur Recta EF, quæ, ex *Cycloidis* naturâ, parallela eſt Rectæ BC. Unde BM eſt æqualis EF, & EM æqualis BF; quæ, propter *Cycloidem*, æquatur Arcui VF; & proinde AM eſt æqualis Arcui EHVF.

Per Prop. XXV. Part. II. *Horologii Oſcillatorii* Hugenii, Tempus, quo Grave è quiete cadens percurrit AV, eſt ad Tempus Caſûs per EV, ut Semicircumferentia ad Diametrum; &, per dictæ Partis Propoſitionem ultimam, Tempus, quo Grave percurrit VB, poſt decurſam AV, (nempe æquale Tempori, quo Grave percurrit KV, poſt decurſam AK,) eſt ad Tempus Lapſûs per AV, ſicut Arcus VF ad ſemicircumferentiam; adeòque ad

Tempus Casûs per E V, sicut F V ad Diametrum, Quare Tempus, quo Grave percurrit Curvam A V B, est ad Tempus Casûs per E V, sicut Arcus E H V F, ad Diametrum E V. Sed, Tempus Casûs per E V, est ad Tempus Casus per L B, (sive E G,) sicut E V ad E F. Igitur, ex æquo, Tempus, quo Grave percurrit A V B, est ad Tempus Casûs per L B, sicut Arcus E H V F ad Subtensam E F; hoc est ut Recta A M, ad Rectam M B. Rursus, Tempus Casûs per L B est ad Tempus Lapsûs per A B, ut L B ad A B. Ergo, Ratio Temporis, quo Grave percurrit A V B, ad Tempus, quo percurrit A B, componitur ex Ratione A M ad M B, & Ratione L B ad B A; adeóque æqualis est Rationi $AM \times LB$ ad $MB \times BA$. Sed $AM \times LB$ est æquale $MB \times AC$; quia utrumque æquatur duplo Trianguli A B M. Et igitur, Tempus, quo Grave è quiete cadens percurrit Curvam *Cycloidis* A V B, est ad Tempus, quo percurrit Rectam A B, sicut $MB \times AC$, ad $MB \times BA$; id est, sicut A C ad A B. *Q. E. D.*

Similitérque procedet Demonstratio, si Punctum B, sit inter A & V.

OPUSCULUM VII.

PROBLEMATIS

Olim in Actis Eruditorum Lipsiæ *propositi*

SOLUTIO GENERALIS.

IN *Actis Eruditorum* pro mense *Octobri* Anni 1698 pag. 471. D. *Johannes* BERNOULLIUS hæc scripsit. Methodum, quam optaveram generalem secandi Curvas ordinatim positione datas, sive algebraïcas, sive transcendentales, in Angulo recto, sive obliquo, invariabili, sive datâ lege variabili, tandem ex voto erui: cui, LEIBNITIO approbatore, ne γρὺ addi potest ad ulteriorem perfectionem, & vel ideo tantùm quòd perpetuò ad Æquationem deducat: in quâ si interdum indeterminatæ sunt inseparabiles, Methodus non ideo imperfectior est, non enim hujus sed alius est Methodi indeterminatas separare: Rogamus igitur Fratrem ut velit suas quoque vires exercere in re tanti momenti. Suscepti laboris non pœnitebit, si felix successus fructu jucundo compensaverit. Scio relicturum suum, quem nunc fovet, modum, qui in paucissimis tantùm exemplis adhiberi potest.

Transact. Philos. 1716. Janu. Fevr. & Mart. N°. 347. pag. 399.

Hi tres Viri Celeberrimi sese, jam ab annis quatuor vel quinque, circiter, in solvendis hujusmodi Problematibus exercuerant. Absque spiritu divinandi eandem Solutionem cum *Bernoullianâ* tradere difficile fuerit. Sufficit quòd Solutio sequens sit generalis, & ad Æquationem semper deducat.

PROBLEMA.

Quæritur Methodus generalis inveniendi Seriem Curvarum, quæ Curvas in Serie aliâ quâcumque datâ constitutas, ad Angulum, vel datum, vel datâ lege variabilem secabunt.

SOLUTIO.

Natura Curvarum secandarum dat Tangentes earundem ad intersectionum Puncta quæcunque: & Anguli intersectionum dant Perpendicula Curvarum secantium; & Perpendicula duo coeuntia, per concursum suum ultimum, dant Centrum Curvaminis Curvæ secantis ad Punctum intersectionis cujuscunque. Ducatur Abscissa in situ quocumque commodo, & sit ejus Fluxio Unitas; & positio Perpendiculi dabit Fluxionem primam Ordinatæ ad Curvam quæsitam pertinentis; & Curvamen hujus Curvæ dabit Fluxionem secundam ejusdem Ordinatæ. Et sic Problema semper deducetur ad Æquationes. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Non hujus, sed alius est Methodi Æquationes reducere, & indeterminatas separare, absolutè, si fieri possit, sin minus, per Series infinitas. Problema hocce, cum nullius fere sit usûs, in *Actis Eruditorum* annos plures neglectum & insolutum mansit. Et eâdem de causâ Solutionem ejus non ulteriùs prosequor.

OPUSCU-

OPUSCULA VIII. & IX.

EXCERPTA

EX EPISTOLIS

AUT

ISAACI NEWTONI

AUT

AD EUM SPECTANTIBUS.

Editis in

COMMERCIO EPISTOLARI

COLLINSII &c.

OPUSCU-

OPUSCULUM VIII.

EXCERPTUM EX EPISTOLA

ISAACI NEWTONI

AD

COLLINSIUM

A. D. 10. Decemb. Ann. 1672.

Ex animo gaudeo D. Barovii amici nostri Reverendi Lectiones Mathematicis exteris adeò placuisse, neque parum me juvat intelligere eos [Slusium & Gregorium] in eandem mecum incidisse ducendi Tangentes Methodum. Qualem eam esse conjiciam ex hoc exemplo percipies. Pone (*Vide Figuram hujus Opusculi*) CB Applicatam ad AB in quovis Angulo dato terminari ad quamvis Curvam AC; & dicatur $AB = x$, & $BC = y$; habitudoque inter x & y exprimatur qualibet Æquatione, puta, $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, quâ ipsâ determinatur Curva. Regula ducendi Tangentem hæc est; multiplica Æquationis Terminos per quamlibet Progressionem arithmeticam juxta Dimensiones y, puta $\underset{0}{x^3} - \underset{1}{2xxy} + \underset{0}{bxx} - \underset{0}{bbx} + \underset{2}{byy} - \underset{3}{y^3}$, ut & juxta Dimensiones x, puta, $\underset{3}{x^3} - \underset{2}{2xxy} + \underset{2}{bxx} - \underset{1}{bbx} + \underset{0}{byy} - \underset{0}{y^3}$. Prius Productum erit Numerator, & posterius, divisum per x, Denominator Fractionis, quæ exprimet Longitudinem BD, ad cujus extremitatem D ducenda est Tangens CD: est ergo Longitudo BD $= \frac{-2xxy + 2byy - 3y^3}{3xx - 4xy + 2bx - bb}$.

Com. Epistol. secund. Edit. pag. 104. & seq. Num. XXVI.

 Hoc

Hoc eſt unum particulare, vel Corollarium potiùs Methodi generalis, quæ extendit ſe, citra moleſtum ullum Calculum, non modò ad ducendum Tangentes ad quaſvis Curvas, ſive Geometricas, ſive Mechanicas, vel quomodocunque rectas Lineas, aliáſve Curvas reſpicientes; verùm etiam ad reſolvendum alia abſtruſiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum, &c. Neque, (quemadmodum HUDDENII Methodus de *Maximis*, & *Minimis*,) ad ſolas reſtringitur Æquationes illas, quæ Quantitatibus ſurdis ſunt immunes.

Hanc Methodum intertexui alteri iſti, quâ Æquationum Exegeſin inſtituo, reducendo eas ad Series infinitas. Memini me ex occaſione aliquando narrâſſe D. BARROVIO, edendis Lectionibus ſuis occupato, inſtructum me eſſe hujuſmodi Methodo Tangentes ducendi: Sed neſcio quo diverticulo ab eâ ipſi deſcribendâ fuerim avocatus.

SLUSII Methodum Tangentes ducendi brevi publicè prodituram confido: quamprimùm advenerit, exemplar ejus ad me tranſmittere ne grave ducas.

OPUS-

OPUSCULUM IX.

ART. I.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ OLDEMBURGII ad SLUSIUM.

In quâ continetur

PARS EPISTOLÆ

A B

ISAACO NEWTONO

A D

Eundem OLDEMBURGIUM datæ.

A. D. 10. Julii 1673.

EN tibi, Vir illuſtriſſime, impreſſum modum tuum demonſtrandi Methodum tuam ducendi Tangentes ad quaſlibet Curvas, quemadmodum poſtremis tuis litteris eum mihi communicaveras: ſubticui viri nomen, offenſionis evitandi causâ. ſcripſit mihi D. NEWTONUS in hanc ſententiam.

Ibidem pag. 107. Num. XXIX.

Ex priori tuâ Epiſtolâ ſubdubitabam, exiſtimarétne celeberrimus SLUSIUS per ea, quæ ipſi de me ſcripſeras, me mihi tribuere Methodum ipſius ducendi Tangentes; donec intelligerem à D.

Collinsio, te ipsi significasse, eam, ex opinione tuâ, seriùs hîc inventam fuisse. Tibi quippe videtur, eam D. Slusio perspectam fuisse aliquot annis priusquàm ederet Mesolabum suum, proïndéque antequàm ego eam intelligerem. At, si res secus se haberet, cùm tamen eam primus communicaverit Amicis suis & litterato Orbi, jure merito ipsi debetur. Quoad Methodos illas, eædem sunt, quanquam, crediderim, ex principiis diversis derivatæ. Nescio tamen num ipsius principia eam largiantur adeò generalem ac mea; quæ ad Æquationes Terminis surdis affectas se extendunt, absque eorum ad aliam formam Reductione.

Hæc ille, quæ in bonam partem à te acceptum iri confido.

ART. II.

EXCERPTUM

Ex Epistolâ Leibnitii ad Oldemburgium

A. D. 30. Martii An. 1675.

Ibidem pag. 117. Num. XXXV.

Scribis clarissimum Newtonum vestrum habere Methodum exhibendi Quadraturas omnes, omniúmque curvarum Superficierum & Solidorum ex revolutione genitorum Dimensiones, & Centrorum Gravitatis inventiones, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quæ Methodus si est universalis & commoda, meretur æstimari; nec dubito fore ingeniosissimo Auctore dignam. Addis tale quid Gregorio innotuisse.

ART.

ART. III.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ OLDEMBURGII ad LEIBNITIUM, quâ ſuperiori reſpondetur.

A. D. 15. Aprilis An. 1675.

D. COLLINSIUS, præmiſſâ ſalute, quæ ſequuntur remittit. Primo Clariſſimum GREGORIUM in poſtremâ ſuâ ad Illuſtrem HUGENIUM reſponſione, Seriem ſuppeditâſſe ad Semicircumferentiam Circuli inveniendam, quæ talis.

Ibidem pag. 118. Num. XXXVI.

Pone Radium $= r$, dimidium Latus Quadrati inſcripti Circulo $= d$, & Differentiam inter Radium & Latus Quadrati $= e$, Semicircumferentia æqualis eſt.

$$\frac{4rr}{2d - \frac{e}{3} - \frac{ee}{90d} - \frac{e^3}{756dd} - \frac{2e^4}{113400d^3} - \frac{260e^5}{74844000d^4} - \&c.}$$

in infinitum; quæ Series adeò produci poteſt, ut à Semicircumferentiâ minùs differat, quàm ulla Quantitas aſſignabilis.

Editum hoc fuit à D. GREGORIO poſtquam D. MERCATORIS Logarithmotechnia jam extabat, quæ, quàm-primùm viderat lucem, ad D. BARROVIUM à me fuit tranſmiſſa; qui obſervato in ea infinitæ Seriei uſu ad Logarithmos conſtruendos, reſcribebat Methodum illam jam aliquandiu excogitatam fuiſſe à Succeſſore ſuo NEWTONO, omnibúſque Curvis, earúmque portionibus geometricis, æquè ac mechanicis, univerſim applicatam, cujus rei ſpecimina quædam ſubjecit, videlicet.

Poſitâ pro Radio Unitate, datóque x pro Sinu, ad inveniendum z Arcum Series hæc eſt $z = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152} \times x^9$ &c. in infinitum. Et, extractâ Radice hujus Æquationis, Me-

 tho-

thodo symbolicâ, si dederis z pro Arcu, ad inveniendum x Sinum Series hæc est $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880} \times z^9$ — &c. Atque hæc series facilè continuatur in infinitum. Prioris beneficio ex Sinu triginta Graduum CEULENII numeri facilè struuntur. &c.

Consimiliter, si ponas Radium R, & B Sinum Arcûs: Zona (*vide Figuram hujus Opusculi*), inter Diametrum & Chordam illi parallelam est $= 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} - \frac{7B^{11}}{1408R^9}$ —, &c. Atque eadem Series, mutatis signis Termini secundi, quarti, & sexti, &c., inservit assignandæ Areæ zonæ æquilateris Hyperbolæ, videlicet AFGB $= 2RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9}$ — &c.

ART. IV.

EXCERPTUM

Ex Epistolâ OLDEMBURGII ad LEIBNITIUM

A. D. 24. Junii 1675.

Ibidem pag. 123. Num. XL.

DOMINUS NEWTONUS, beneficio Logarithmorum graduatorum in Scalis παραλλήλως locandis ad distantias æquales, vel Circulorum concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit Radices Æquationum. Tres Regulæ rem conficiunt pro Cubicis, quatuor pro Biquadraticis. In harum dispositione respectivi Coefficientes omnes jacent in eâdem Lineâ rectâ; à cujus Puncto tam remoto à primâ Regulâ ac Scalæ graduatæ sunt ab invicem, Linea recta iis superextenditur, unà cum præscriptis conformibus genio Æquationis, quâ in Regularum unâ datur Potestas pura Radicis quæsitæ.

ART. V.

ART. V.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ LEIBNITII ad OLDEMBURGIUM

Pariſiis. A. D. 12. Maii 1676.

CUM *Georgius* MOHR *Danus*, in Geometriâ & Analyſi verſatiſſimus, nobis attulerit communicatam ſibi à Doctiſſimo COLLINSIO veſtro expreſſionem Relationis inter Arcum & Sinum per infinitas Series ſequentes:

Poſito Sinu $= x$, Arcu $= z$, Radio $= 1$.

$$z = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9, \text{ \&c.}$$

$$x = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 + \frac{1}{362880} z^9, \text{ \&c.}$$

Hæc, * inquam, cùm nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingenioſa videntur, & poſterior inprimis Series elegantiam quandam ſingularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris, Vir Clariſſime, ſi Demonſtrationem tranſmiſeris, ... Oro, ut Clariſſimo COLLINSIO multam à me ſalutem dicas: is facilè tibi materiam ſuppeditabit ſatisfaciendi deſiderio meo.

* Hæ Series NEWTONI ſunt Vide Articulum ſuperiorem, & Opuſc. I. pag. 22. hujus &c. & ratio inveniendorum Coefficientium, quæ infra traditur, item Newtoniana eſt. Opuſc. I. pag. 23. hujus.

OPUS-

OPUSCULUM IX.

ART. VI.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ COLLINSII ad OLDEMBURGIUM, quâ ſuperiori reſpondetur.

A. D. 14. Junii 1676

Ibidem pag. 126. 127. Num. XLV.

RESPONDEAS, ſi placet, ad ea quæ quærit D. LEIBNITIUS in Litteris ejus 12 Maii datis, Seriei primæ numeros Coefficientes $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{40}$, $\frac{5}{112}$, $\frac{35}{1152}$, hoc modo compoſitos eſſe, $\frac{1\times 1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$, & $\frac{1}{6}\times\frac{3\times 3}{4\times 5} = \frac{3}{40}$, & $\frac{3}{40}\times\frac{5\times 5}{6\times 7} = \frac{5}{112}$, & $\frac{5}{112}\times\frac{7\times 7}{8\times 9} = \frac{35}{1152}$, & $\frac{35}{1152}\times\frac{9\times 9}{10\times 11} = \frac{63}{2816}$, atque ita deinceps in infinitum: unde intelligi poſſit hanc Seriem elegantiâ minimè cedere converſæ ejuſdem, quæ tamen illi magis arridet. Meditata ejus de eodem Argumento, cùm fundamentis planè diverſis innitantur, non poſſunt nobis non eſſe acceptiſſima; atque exoptamus ea fidem noſtram exſuperare poſſe. Hujus autem Methodi ea eſt præſtantia, ut, cùm tam latè pateat, ad nullam hæreat difficultatem. GREGORIUM autem aliósque in eâ fuiſſe opinione arbitror, ut quicquid uſpiam antea de hac re innotuit, quaſi dubia diluculi lux fuit, ſi cum meridianâ claritate conferatur.

OPUS-

OPUSCULUM X.

ISAACI NEWTONI EPISTOLA PRIOR

AD

OLDEMBURGIUM.

Edita in COMMERCIO EPISTOLICO. &c.

OPUSCULUM X.

Epistola prior ISAACI NEWTONI *Matheseos Professoris in Celeberrimâ Academiâ* CANTABRIGIENSI; *ad* HENRICUM OLDEMBURGIUM, *Regalis* SOCIETATIS LONDINI *Secretarium*; 13. *Junii* 1676. *cum Illustrissimò Viro* GODOFREDO GUILIELMO LEIBNITIO (*eo mediante*) *communicanda. Literis* OLDEMBURGII, (26. *Junii*) ad LEIBNITIUM *missa.*

QUanquam D. LEIBNITII modestia, in Excerptis, quæ ex Epistolâ ejus ad me nuper misisti, Nostratibus multùm tribuat circa speculationem quandam *Infinitarum Serierum*, de quâ jam cæpit esse rumor; nullus dubito tamen, quin ille, non tantùm, (quod asserit,) Methodum reducendi Quantitates quascunque in ejusmodi Series, sed & varia Compendia, fortè nostris similia, si non & meliora, adinvenerit.

Comm. Epist Secun. Edit. pag. 131. Num. XLVIII.

Quoniam tamen ea scire pervelit, quæ ab Anglis hac in re inventa sunt, & ipse ante annos aliquot in hanc Speculationem inciderim; ut votis ejus aliquâ saltem ex parte satisfacerem, nonnulla eorum, quæ mihi occurrerunt, ad te transmisi.

Fractiones in infinitas Series reducuntur per Divisionem; & Quantitates Radicales per Extractionem Radicum: perinde instituendo Operationes istas in Speciebus, ac institui solent in Decimalibus Numeris. Hæc sunt Fundamenta harum Reductionum.

Sed Extractiones Radicum multùm abbreviantur per hoc *Theorema.*

$$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \&c.$$

Ubi $P+PQ$ significat Quantitatem, cujus Radix, vel etiam Dimensio quævis, vel Radix Dimensionis, investiganda est. P, primum Terminum Quantitatis ejus; Q reliquos Terminos divisos per primum. Et $\frac{m}{n}$ numeralem Indicem Dimensionis ipsius $P+PQ$; sive Dimensio illa sit integra; sive, (ut ita loquar,) fracta; sive affirmativa, sive negativa. Nam, sicut Analystæ, pro aa, aaa, &c. scribere solent a^2, a^3, &c. sic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{C.a^5}$, &c. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{aaa}$, scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et sic pro $\frac{aa}{\sqrt{C: a^3+bbx}}$, scribo $aa\times\overline{a^3+bbx}\Big|^{-\frac{1}{3}}$; & pro $\frac{aab}{\sqrt{C: a^3+bbx\times a^3+bbx}}$ scribo $aab\times\overline{a^3+bbx}\Big|^{-\frac{2}{3}}$. In quo ultimo casu, si $\overline{a^3+bbx}\Big|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur esse $\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}}$ in Regulâ: erit $P=a^3$, $Q=\frac{bbx}{a^3}$, $m=-2$, & $n=3$. Denique, pro Terminis inter operandum inventis in Quoto, usurpo A, B, C, D, &c. Nempe A pro primo Termino $P^{\frac{m}{n}}$; B pro secundo $\frac{m}{n}AQ$; & sic deinceps.

Ceterùm usus Regulæ patebit Exemplis.

Exemplum I.

Est $\sqrt{cc+xx}$, (seu $\overline{cc+xx}\Big|^{\frac{1}{2}}$), $= c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} -$ &c. Nam, in hoc casu, est $P=cc$; $Q=\frac{xx}{cc}$; $m=1$; $n=2$; $A\ (=P^{\frac{m}{n}}=\overline{cc}\Big|^{\frac{1}{2}})=c$; $B\ (=$

$\frac{m}{n}$

$\frac{m}{n}$ AQ) $= \frac{xx}{2c}$; C (= $\frac{m-n}{2n}$ BQ) $= \frac{-x^4}{8c^3}$. Et sic deinceps.

E X E M P L U M II.

Est $\sqrt[5]{c^5 + c^4 x - x^5}$:, (id est, $\overline{c^5 + c^4 x - x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $= c + \frac{c^4 x - x^5}{5c^4} - \frac{2c^8 xx + 4c^4 x^6 - 2x^{10}}{25c^9}$ + &c. Ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4 x - x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, & $\frac{c^4 x + c^5}{-x^5}$ pro Q; & tunc evadet $\sqrt[5]{c^5 + c^4 x - x^5} = -x + \frac{c^4 x + c^5}{5x^4} + \frac{2c^8 xx + 4c^9 x + c^{10}}{25x^9}$ + &c.

Prior modus eligendus est, si x valde parvum sit; posterior, si valde magnum.

E X E M P L U M III.

Est $\frac{N}{\sqrt[3]{y^3 - aay}}$, (hoc est, $N \times \overline{y^3 - a^2 y}|^{-\frac{1}{3}}$) $= N \times \frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7}$ + &c. Nam, $P = y^3$; $Q = \frac{-aa}{yy}$; $m = -1$; $n = 3$; A($= P^{\frac{m}{n}} = y^{3 \times -\frac{1}{3}}) = y^{-1}$, hoc est, $\frac{1}{y}$: B($= \frac{m}{n} \times AQ = \frac{-1}{3} \times \frac{1}{y} \times \frac{-aa}{yy}) = \frac{aa}{3y^3}$; &c.

E X E M P L U M IV.

Radix cubica ex Quadrato-Quadrato ipsius $d + e$, (hoc est, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) est $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}}$ + &c. Nam, $P = d$; $Q = \frac{e}{d}$; $m = 4$; $n = 3$; A ($= P^{\frac{m}{n}}) = d^{\frac{4}{3}}$ &c.

EXEMPLUM V.

Eodem modo ſimplices etiam Poteſtates eliciuntur. Ut, ſi Quadrato-cubus ipſius $d+e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^5$, ſeu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) deſideretur: erit, juxta Regulam, $P=d$; $Q=\frac{e}{d}$; $m=5$; & $n=1$; Adeòque $A(=P^{\frac{m}{n}})=d^5$; $B(=\frac{m}{n}AQ)=5d^4e$; & ſic $C=10d^3ee$; $D=10dde^3$; $E=5de^4$; $F=e^5$; & $G(=\frac{m-5n}{6n}FQ)=0$, Hoc eſt, $\overline{d+e}|^5=d^5+5d^4e+10d^3ee+10dde^3+5de^4+e^5$.

EXEMPLUM VI.

Quinetiam Diviſio, (ſive ſimplex ſit, ſive repetita,) per eamdem Regulam perficitur. Ut, ſi $\frac{1}{d+e}$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{-1}$; ſive $\overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}$) in Seriem ſimplicium Terminorum reſolvendum ſit: Erit, juxta Regulam, $P=d$; $Q=\frac{e}{d}$; $m=-1$; $n=1$; & $A(P^{\frac{m}{n}}=d^{-\frac{1}{1}})=d^{-1}$, ſeu $\frac{1}{d}$; $B(=\frac{m}{n}\times AQ=-1\times\frac{1}{d}\times\frac{e}{d}=-\frac{e}{dd}$; & ſic $C=\frac{ee}{d^3}$; $D=-\frac{e^3}{d^4}$, &c., Hoc eſt, $\frac{1}{d+e}=\frac{1}{d}-\frac{e}{dd}+\frac{ee}{d^3}-\frac{e^3}{d^4}+$ &c.

EXEMPLUM VII.

Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eſt, Unitas ter diviſa per $d+e$, vel ſemel per Cubum ejus,) evadit $\frac{1}{d^3}-\frac{3e}{d^4}+\frac{6ee}{d^5}-\frac{10e^3}{d^6}+$ &c.

EXEM-

EXEMPLUM VIII.

Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$, (hoc eſt, N diviſum per Radicem cubicam ipſius $d+e$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} + \&c.$

EXEMPLUM IX.

Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$, hoc eſt, N diviſum per Radicem Quadrato-Cubicam ex Cubo ipſius $d+e$, ſive $\frac{N}{\sqrt[5]{d^3+3dde+3dee+e^3}}$ evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} + \&c.$

Per eandem Regulam Geneſes Poteſtatum, Diviſiones per Poteſtates, aut per Quantitates radicales, & Extractiones Radicum altiorum in Numeris etiam commodè inſtituuntur.

Extractiones Radicum Æquationum affectarum in Speciebus imitantur earum Extractionem in Numeris; Sed Methodus VIETÆ, & OUGHTREDI noſtri huic negotio minùs idonea eſt: Quapropter aliam excogitare adactus ſum, cujus ſpecimen exhibent ſequentia Diagrammata. Ubi dextra Columna prodit ſubſtituendo in mediâ Columnâ Valores y; p; q; r; &c. in ſiniſtrâ Columnâ expreſſos.

Prius Diagramma exhibet Reſolutionem hujus numeralis Æquationis $y^3 - 2y - 5 = 0$. Et hìc in ſupremis Numeris Pars negativa Radicis, ſubducta de Parte affirmativâ, relinquit abſolutam Radicem 2,09455148.

Et poſterius Diagramma exhibet Reſolutionem hujus litterariæ Æquationis $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2,\ 10000000$ &c.
		$- 0,\ 00544852$
		$+ 2,\ 09455148$; &c. $= y$
$+ 2 + p = y$	$+ y^3$	$+ 8 + 12p + 6pp + p^3$
	$- 2y$	$- 4 - 2p$
	$- 5$	$- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6pp + p^3$
$+ 0,1 + q = p$	$+ p^3$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3qq + q^3$
	$+ 6pp$	$+ 0,06 + 1,2 + 6,$
	$+ 10p$	$+ 1, \quad + 10,$
	$- 1$	$- 1$
	Summa	$+ 0,061 + 11,23q + 6,3qq + q^3$
$- 0,0054 + r = q$	$+ q^3$	$- 0,0000001 + 0,000r$; &c.
	$+ 6,3qq$	$+ 0,0001837 - 0,068$
	$+ 11,23q$	$- 0,060642 + 11,23$
	$+ 0,061$	$+ 0,061$
	Summa	$+ 0,0005416 + 11,162r$
$- 0,00004852 + s = r$		

$y^3 +$

$y^3+axy+aay-x^3-2a^3=0\ (a-\frac{x}{4}+\frac{xx}{64a}+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$; &c.

$+a+p=y$	y^3	$a^3+3aap+3app+p^3$
	$+axy$	$+aax+axp$
	$+aay$	$+a^3\quad +aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{1}{4}x+q=p$	p^3	$-\frac{1}{64}x^3+\frac{3}{16}xxq$; &c.
	$+3app$	$+\frac{3}{16}axx-\frac{3}{2}axq+3aqq$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}axx+axq$
	$+4aap$	$-aax+4aaq$
	$+aax$	$+aax$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{xx}{64a}+r=q$	$+3aqq$	$+\frac{3x^4}{4096a}$; &c.
	$+\frac{3}{16}xxq$	$+\frac{3x^4}{1024a}$; &c.
	$-\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3-\frac{1}{2}axr$
	$+4aaq$	$+\frac{1}{16}axx+4aar$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
	$-\frac{1}{16}axx$	$-\frac{1}{16}axx$
$+4aa-\frac{1}{2}ax)$	$+\frac{131}{128}x^3-\frac{15x^4}{4096a}\ (+\frac{131x^3}{512aa}+\frac{509x^4}{16384a^3}$	

In priori Diagrammate, primus Terminus Valoris ipsorum p; q; r, in primâ Columnâ, invenitur dividendo primum Terminum Summæ proximè superioris, per Coefficientem secundi Termini ejusdem Summæ, (ut -1 per 10, aut $0,061$ per $11,23$,) & mutando signum Quoti.

Et idem Terminus eodem ferè modo invenitur in secundo Diagrammate. Sed hìc præcipua difficultas est in inventione primi Termini Radicis. Id quod Methodo generali perficitur: sed hoc, brevitatis gratiâ, jam prætereo; ut & alia quædam, quæ ad concinnandam Operationem spectant: neque enim hìc compendia tradere vacat. Sed dicam tantùm in genere, Quòd Radix cujusvis Æquationis semel extracta, pro Regulâ resolvendi consimiles Æquationes asservari possit: quòdque ex pluribus ejusmodi Regulis, Regulam generaliorem plerumque efformare liceat; & quòd Radices omnes, sive simplices sint, sive affectæ, modis infinitis extrahi possint; de quorum simplicioribus itaque semper consulendum est.

Quomodo ex Æquationibus, sic ad infinitas Series reductis, Areæ, & Longitudines Curvarum, Contenta, & Superficies Solidorum, vel quorumlibet Segmentorum Figurarum quarumvis, eorùmque Centra Gravitatis determinantur; & quomodo etiam Curvæ omnes mechanicæ ad ejusmodi Æquationes infinitarum Serierum reduci possint, indéque Problemata circa illas resolvi, perinde ac si geometricæ essent; nimis longum foret describere; sufficiat specimina quædam talium Problematum recensuisse: Inque iis, brevitatis gratiâ, litteras A; B; C; D, &c. pro Terminis Seriei, sicut sub initio, nonnunquam usurpabo.

EXEMPLUM I.

Si ex dato Sinu recto, vel Sinu verso, Arcus desideretur: Sit Radius $= r$, & Sinus rectus $= x$. Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$; &c., hoc est, $= x + \frac{1 \times 1 \times xx}{2 \times 3 \times rr} A + \frac{3 \times 3xx}{4 \times 5rr} \times B + \frac{4 \times 5xx}{6 \times 7rr} C + \frac{7 \times 7xx}{8 \times 9rr} D +$; &c.

Vel,

Vel, fit d Diameter, ac x Sinus verfus; & erit Arcus æqualis $d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$; &c.; hoc eft, $= \sqrt{dx}$ in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40dd} + \frac{5x^3}{112d^3}$; &c.

Si viciffim, *ex dato Arcu defideretur Sinus*: Sit Radius $= r$ & Arcus $= z$; eritque Sinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$; &c.; hoc eft, $= z - \frac{zz}{2\times 3rr}A - \frac{zz}{4\times 5rr}\times B - \frac{zz}{6\times 7rr}C -$; &c. Et Sinus verfus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$; &c.; hoc eft, $= \frac{zz}{1\times 2r} - \frac{zz}{3\times 4rr}A - \frac{zz}{5\times 6rr}\times B - \frac{zz}{7\times 8rr}C -$; &c.

Exemplum II.

Si Arcus capiendus fit in ratione datâ ad alium Arcum: Efto Diameter $= d$, Chorda Arcûs dati $= x$, & Arcus quæfitus ad Arcum illum datum, ut n ad 1; Eritque Arcûs quæfiti Chorda $= nx + \frac{1 - nn}{2\times 3dd}xxA + \frac{9 - nn}{4\times 5dd}xxB + \frac{25 - nn}{6\times 7dd}xxC + \frac{49 - nn}{8\times 9dd}xxD + \frac{81 - nn}{10\times 11dd}xxE +$; &c.

Ubi nota, quòd, cùm n eft Numerus impar, Series definet effe infinita, & evadet eadem quæ prodit per vulgarem Algebram, ad multiplicandum datum Angulum per iftum Numerum n.

Exemplum III.

Si in Axe alterutro (*Fig.* 1.) AB Ellipfeos ABD, (cujus Centrum C, & Axis alter DH,) detur Punctum aliquod E, circa quod Recta EG occurrens Ellipfi in G, motu angulari feratur; & ex datâ Areâ Sectoris elliptici BEG, quæratur Recta GF, quæ à Puncto G ad

TAB. I.

Axem normaliter demittitur: Esto $BC = q$; $DC = r$; $EB = t$; ac duplum Areæ $BEG = z$; & erit $GF = \frac{1}{t} z - \frac{q}{6rrt^4} z^3 + \frac{10qq - 9qt}{120r^4t^7} z^5 - \frac{280q^3 + 504qqt - 225qtt}{5040r^6t^{10}} z^7 +$; &c. Sic itaque astronomicum illud KEPLERI Problema resolvi potest.

In eâdem Ellipsi, si statuantur $CD = r$; $\frac{\overline{CB}|^2}{CD} = c$; & $CF = x$; erit Arcus ellipticus DG

$$
\begin{aligned}
= x + \frac{1}{6cc} x^3 &+ \frac{1}{10rc^3} x^5 + \frac{1}{14rrc^4} x^7 + \frac{8}{18r^3c^5} x^9 + \frac{1}{22r^4c^6} x^{11}; + \&c. \\
&- \frac{1}{40c^4} \quad - \frac{1}{28rc^5} \quad - \frac{1}{24rrc^6} \quad - \frac{1}{22r^3c^7} \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{112c^6} \quad + \frac{1}{48rc^7} \quad + \frac{3}{88rrc^8} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{5}{1152c^8} \quad - \frac{5}{352rc^9} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{7}{2816c^{10}}
\end{aligned}
$$

Hic numerales Coefficientes supremorum Terminorum ($\frac{1}{6}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{14}$; &c.). sunt in musicâ Progressione. Et numerales Coefficientes omnium inferiorum in unaquâque Columnâ prodeunt multiplicando continuò numeralem Coefficientem supremi Termini per Terminos hujus Progressionis $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$; $\frac{\frac{3}{2}n - 3}{4}$, $\frac{\frac{5}{2}n - 5}{6}$; $\frac{\frac{7}{2}n - 7}{8}$; $\frac{\frac{9}{2}n - 9}{10}$; &c. Ubi n significat Numerum Dimensionum ipsius c in Denominatore istius supremi Termini. *Ex. gr.* ut Terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$ Numerales Coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducóque $\frac{1}{22}$, (numeralem Coefficientem ipsius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$; hoc est, in 1; & prodit $\frac{1}{22}$, numeralis Coefficiens Termini proximè

ximè inferioris: Dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{2}n - 3}{4}$; sive in $\frac{n-3}{4}$; hoc est, in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis Coefficiens tertii Termini in istâ Columnâ. Atque ita $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{5}{2}n - 5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$, numeralem Coefficientem quarti Termini; & $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{7}{2}n - 7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$, numeralem Coefficientem infimi Termini. Idem in aliis ad infinitum usque Columnis præstari potest. Adeóque valor ipsius DG per hanc Regulam pro lubitu produci.

Ad hæc, si BF dicatur $= x$, sitque r latus rectum Ellipseos, & $e = \frac{r}{AB}$; Erit Arcus ellipticus $BG = \sqrt{r\,x}$ in:

$$1 + \frac{+2 - \frac{3}{2}e}{3r}x + \frac{-2 + 3e - \frac{5}{8}ee}{5rr}xx + \frac{+4 - 9e + \frac{27}{4}ee - \frac{7}{16}e^3}{7r^3}x^3 + \frac{-10 + 30e - \frac{133}{4}ee + \frac{91}{8}e^3 - \frac{45}{128}e^4}{9r^4}x^4;$$

Quare, si ambitus totius Ellipseos desideretur; biseca CB in F, & quære Arcum DG, per prius Theorema, & Arcum BG per posterius.

Si, vice versâ, *ex dato Arcu Elliptico* DG, quæratur Sinus ejus CF; tum dicto $CD = r$, $\frac{\overline{CB}|^2}{CD} = c$, & Arcu illo $DG = z$; Erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc}z^3 \begin{matrix} -\frac{1}{10rc^3} \\ +\frac{13}{120c^4} \end{matrix} z^5 \begin{matrix} -\frac{1}{14rrc^4} \\ +\frac{71}{420rc^5} \\ -\frac{493}{5040c^6} \end{matrix} z^7 - \text{\&c.}$$

Quæ autem de Ellipsi dicta sunt, omnia facilè accommodantur ad

ad Hyperbolam, mutatis tantùm signis ipsorum c, & e, ubi sunt imparium Dimensionum.

EXEMPLUM IV.

TAB. I. Præterea, (*Fig.* 2.) si sit CE Hyperbola, cujus Asymptoti AD, AF, rectum Angulum FAD constituant; & ad AD erigantur utcunque Perpendicula BC, DE, occurrentia Hyperbolæ in C, & E; & AB dicatur $= a$; BC $= b$; & Area BCED $= z$; Erit BD $= \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} +$; &c. Ubi Coefficientes Denominatorum prodeunt multiplicando Terminos hujus arithmeticæ Progressionis, 1; 2; 3; 4; 5; &c. in se continuo.

Et hinc ex Logarithmo dato potest Numerus ei competens inveniri.

EXEMPLUM V.

TAB. II. Esto (*Fig.* 3.) VDE *Quadratrix*, cujus Vertex est V, existente A Centro, & AE Semi-diametro Circuli, ad quem aptatur, & Angulo VAE recto: Demissóque ad AE Perpendiculo quovis DB, & actâ Quadratricis Tangente DT occurrente Axi ejus AV in T: Dic AV $= a$; & AB $= x$.

Erítque BD $= a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} -$; &c.

Et VT $= \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} +$; &c.

Et Area AVDB $= ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} -$; &c.

Et Arcus VD $= x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} +$; &c.

Unde vicissim, ex dato BD, vel VT, aut Areâ AVDB, Arcúve VD, per Resolutionem affectarum Æquationum erui potest x seu AB.

EXEM-

Fig. 3. *OPUSC. VI.*

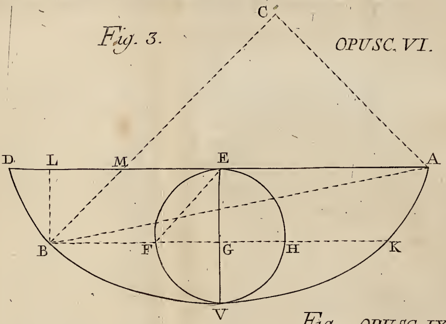


Fig. OPUSC. VIII.

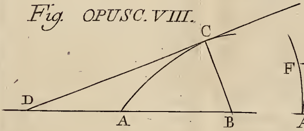
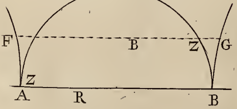


Fig. OPUSC. IX.



OPUSC. X. Tab. I.

Fig. 1.

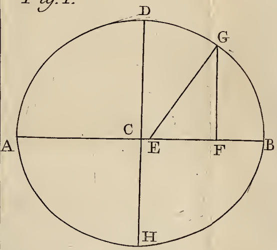
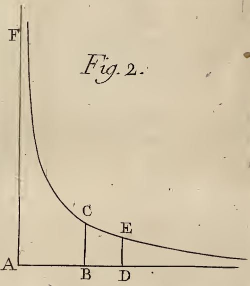


Fig. 2.



EXEMPLUM VI.

Esto denique (*Fig.* 4.) AEB Sphæroides revolutione Ellipseos AEB circa Axem AB genita, & secta Planis quatuor, AB per Axem transeunte, DG parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante Axem, & FG parallelo CE: sitque Recta CB $= a$; CE $= c$; CF $= x$; & FG $= y$. TAB. II.

Et sphæroideos segmentum CDGF, dictis quatuor Planis comprehensum, erit

$$+2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9 - ;\ \&c.$$
$$- \frac{cx^3}{3aa} - \frac{x^3}{18caa} - \frac{x^3}{40c^3aa} - \frac{5x^3}{336c^5aa} - ;\ \&c.$$
$$- \frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - ;\ \&c.$$
$$- \frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - ;\ \&c.$$
$$- \frac{5cx^9}{576a^8} - ;\ \&c.$$
$$- ;\ \&c.$$

Ubi numerales Coefficientes supremorum Terminorum (2; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{20}$; $-\frac{1}{56}$; $-\frac{5}{576}$; &c.) in infinitum producuntur multiplicando primum Coefficientem 2 continuò per Terminos hujus Progressionis $-\frac{1\times1}{2\times3}$; $\frac{1\times3}{4\times5}$; $\frac{3\times5}{6\times7}$; $\frac{5\times7}{8\times9}$; $\frac{7\times9}{10\times11}$; &c. Et numerales Coefficientes Terminorum in unaquâque Columnâ descendentium in infinitum producuntur, multiplicando continuò Coefficientem supremi Termini in primâ Columnâ per eandem Progressionem; in secundâ autem per Terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}$; $\frac{3\times3}{4\times5}$; $\frac{5\times5}{6\times7}$; $\frac{7\times7}{8\times9}$; &c., in tertiâ per Terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}$; $\frac{5\times3}{4\times5}$; $\frac{7\times5}{6\times7}$; $\frac{9\times7}{8\times9}$; &c.; in quartâ per Terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}$; $\frac{7\times3}{4\times5}$; $\frac{9\times5}{6\times7}$; &c.; in quin-

tâ

tâ per Terminos hujus $\frac{7\times 1}{2\times 3}$; $\frac{9\times 3}{4\times 5}$; $\frac{11\times 5}{6\times 7}$; &c. Et ſic in infinitum.

Et eodem modo Segmenta aliorum Solidorum deſignari, & valores eorum aliquando commodè per Series quaſdam numerales in infinitum produci poſſunt.

Ex his videre eſt, quantùm fines Analyſeos per hujuſmodi infinitas Æquationes amplianiantur: Quippe, quæ, earum beneficio, ad omnia, penè dixerim, Problemata, (ſi numeralia DIOPHANTI, & ſimilia excipias,) ſeſe extendit.

Non tamen omninò univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam Methodos eliciendi Series infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad Series infinitas per Diviſionem, vel Extractionem Radicum ſimplicium, affectarúmve, pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere, quæ circa Reductionem infinitarum Serierum in finitas, ubi rei Natura tulerit, excogitavi. Nam, parciùs ſcribo, quòd hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cæperint, adeo ut ab iiſdem jam per quinque ferè annos abſtinuerim.

Unum tamen addam: quòd poſtquàm Problema aliquod ad infinitam Æquationem deducitur, poſſint inde variæ approximationes in uſum Mechanicæ, nullo ferè negotio, formari; quæ, per alias Methodos quæſitæ, multo labore, temporíſque diſpendio, conſtare ſolent.

Cujus rei exemplo eſſe poſſunt Tractatus HUGENII, aliorúmque de Quadraturâ Circuli. Nam, ut ex datâ Arcûs Chordâ A, & dimidii Arcûs Chordâ B, Arcum illum proximè aſſequaris; finge Arcum illum eſſe $= z$, & Circuli Radium $= r$; juxtáque ſuperiora, erit A (nempè duplum Sinûs dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4\times 6rr} + \frac{z^5}{4\times 4\times 120r^4} -$; &c.

Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2\times 16\times 6rr} + \frac{z^5}{2\times 16\times 16\times 120r^4} -$; &c.

Duc jam B in Numerum fictitium n, & à Producto aufer A, & reſidui ſecundum Terminum, (nempè $-\frac{nz^3}{2\times 16\times 6r} + \frac{z^3}{4\times 6rr}$,) eo ut evaneſcat, pone $= 0$; indéque emerget $n = 8$, & erit

8B

$8B - A = 3z * - \frac{3z^5}{64 \times 120 r^4} +$; &c., hoc est, $\frac{8B - A}{3} = z$; errore tantùm existente $\frac{z^5}{7680 r^4} -$; &c., in excessu. Quod est Theorema *Hugenianum.*

Insuper, si (*Fig.* 5.) in Arcûs Bb Sagittâ AD indefinitè productâ, quæratur Punctum G, à quo actæ Rectæ GB, Gb, abscindant Tangentem Ee quamproximè æqualem Arcui isti: Esto Circuli Centrum C, Diameter $AK = d$; & Sagittâ $AD = x$: Et erit TAB. II.

$$DB\ (= \sqrt{dx - xx}) = d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} -; \&c.$$

$$\text{Et } AE\ (= AB) = d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} + \&c.$$

Et $AE - DB : AD :: AE : AG$; Quare $AG = \frac{3}{2} d - \frac{1}{5} \times x - \frac{12xx}{175d} -$, vel $+$; &c.

Finge ergo $AG = \frac{3}{2} d - \frac{1}{5} x$; & vicissim erit $DG\ (\frac{3}{2} d - \frac{6}{5} x) : DB :: DA : AE - DB$. Quare $AE - DB = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}} +$; &c. Adde DB; & prodit $AE = d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}} +$; &c. Hoc aufer de valore ipsius AE supra habito, & restabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}} +$, vel $-$; &c. Quare, in AG, cape AH quintam partem DA, & $KG = HC$, & actæ GBE, Gbe, abscindent Tangentem Ee quamproximè æqualem Arcui BAb; errore tantùm existente $\frac{16x^3}{525d^3} \sqrt{dx} +$, vel $-$; &c. multò minore scilicet, quàm in Theoremate HUGENII. Quod si fiat $7AK : 3AH :: DH : n$; & capiatur $KG = CH - n$, erit error adhuc multò minor.

Atque

Atque ita, si Circuli Segmentum aliquod BAb per Mechanicam designandum esset: primò reducerem Aream istam in Infinitam Seriem, puta, hanc, $BbA = \frac{4}{3} d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}} -$; &c. Dein quærerem Constructiones mechanicas, quibus hanc Seriem proximè assequerer: cujusmodi sunt hæ: Age Rectam AB, & erit Segmentum $BbA = \frac{2}{3} \overline{AB + BD} \times \frac{4}{5} AD$; proximè; existente scilicet errore tantùm $\frac{x^3}{70dd}\sqrt{dx} +$; &c. in defectu: Vel proximiùs, erit Segmentum illud, (bisecto AD in F, & actâ Rectâ BF,) $= \frac{\overline{4BF + BA}}{15} \times \overline{4AD}$; existente errore solummodò $\frac{x^3}{560dd} \times \sqrt{dx} +$; &c., qui semper minor erit quàm $\frac{1}{1500}$ totius Segmenti, etiamsi Segmentum illud ad usque semicirculum augeatur.

TAB. II. Sic, (*Fig.* 5.) & in Ellipsi BAb, cujus Vertex A, Axis alteruter AK, & Latus rectum AP; cape $PG = \frac{1}{2} AP + \frac{\overline{19AK - 21AP}}{10AK} \times \overline{AD}$.

In Hyperbolâ verò, cape $PG = \frac{1}{2} AP + \frac{\overline{19AK + 21AP}}{10AK} \times \overline{AD}$.

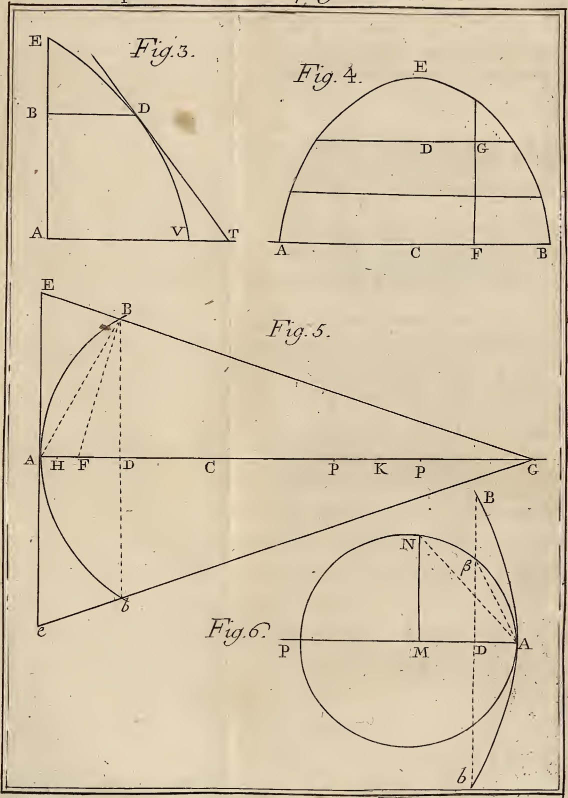
Et actâ Rectâ GBE abscindet Tangentem AE quamproximè æqualem Arcui elliptico, vel hyperbolico AB; dummodò Arcus ille non sit nimis magnus.

Et pro Areâ Segmenti hyperbolici (*Fig.* 6.) BbA; in DP cape $MD = \frac{3\overline{AD}|^2}{4AK}$, & ad D, & M erige Perpendicula $D\beta$, MN, occurrentia Semicirculo super Diametro AP descripto: eritque $\frac{\overline{4AN + A\beta}}{15} \times \overline{4AD} = BbA$ proximè: Vel, proximiùs, erit $\frac{\overline{21AN + 4A\beta}}{75} \times \overline{4AD} = BbA$; si modò capiatur $DM = \frac{5\overline{AD}|^2}{7AK}$.

Cantabrigiæ Junii 13. 1676.

Tuus &c.
ISAACUS NEWTON.

OPUS-


Fig. 3.
E
B
D
A
V
T
Fig. 4.
E
D
G
A
C
F
B
Fig. 5.
E
B
A
H
F
D
C
P
K
P
G
b
e
Fig. 6.
B
N
β
P
M
D
A
b

OPUSCULA XI. & XII.

ISAACI

NEWTONI

EPISTOLA POSTERIOR

AD

OLDEMBURGIUM

Edita in

COMMERCIO EPISTOLICO.

ET

EJUSDEM EPISTOLA AD COLLINSIUM

Edita LONDINI Anno 1711.

ART. I.

EXCERPTUM

Ex Epistolâ LEIBNITII ad OLDEMBURGIUM

CUM

NEWTONO

COMMUNICANDA.

A. D. 27. Augusti 1676.

CLARISSIMO VIRO

Henrico OLDEMBURGIO *Godofredus Guilielmus*

LEIBNITIUS.

Litteræ tuæ die 26. Julii datæ, plura ac memorabiliora circa rem analyticam continent, quàm multa Volumina spissa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac Clarissimis Viris NEWTONO ac COLLINSIO gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.

Commerc. Epist. Edit. secund. pag. 129. N°. LI.

Inventa NEWTONI ejus ingenio digna sunt, quod ex Opticis Experimentis & Tubo Cata-dioptrico abunde eluxit.

Ejúsque Methodus inveniendi Radices Æquationum & Areas Figurarum, per Series infinitas, prorsus differt à meâ; ut mirari liceat diversitatem itinerum, per quæ eòdem pertingere licet.

Mercator Figuras rationales, seu, in quibus Ordinatarum valor ex datis Abscissis rationaliter exprimi potest, (ut scilicet indeterminata Quantitas in Vinculum non ingrediatur,) quadravit & ad infinitas Series reducere docuit per Divisiones; Newtonus autem per Radicum Extractiones. Mea Methodus Corollarium est tantùm Doctrinæ generalis de Transformationibus; &c.*

Sed desideraverim, ut Clarissimus Newtonus nonnulla quoque ampliùs explicet; ut, originem Theorematis, quod initio ponit; item, modum, quo Quantitates p, q, r, in suis Operationibus invenit; ac denique, quomodo in Methodo Regressuum se gerat; ut, cùm ex Logarithmo quærit Numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo suâ derivetur.

Nondum mihi licuit ejus litteras, quâ merentur, diligentiâ legere; quoniam tibi è vestigio respondere volui. Unde non satis nunc quidem affirmare ausim, an nonnulla eorum, quæ suppressit, ex solâ earum lectione consequi possum. Sed optandum tamen foret, ipsum ea potiùs supplere Newtonum; quia credibile est non posse eum scribere, quin aliquid semper præclari nos doceat, Vir (ut apparet,) egregiarum meditationum plenus. &c.

Quod dicere videmini, plerasque difficultates, (exceptis Problematibus *Diophantæis*,) ad Series Infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeò mira & implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt; (ex multis aliis,) Problemata Methodi Tangentium inversæ; quæ etiam Cartesius in potestate non esse fassus est.

In Tomo III. Epistolarum, una habetur ad Beaunium; in quâ ad propositas à Beaunio, Curvas quasdam invenire conatur; quarum una est † Ludus Naturæ, ut intervallum inter Tangentem ad (Axem) Directricem usque productam & Ordinatim applicatam ex Curvâ ad Directricem, sit semper idem; Recta scilicet constans.

Hanc

* Hic Leibnitius explicat Methodum suam, quam explicationem, quia longiuscula est & minimè necessaria, omisi.

† Hic (testante Leibnitio, vide infra Opusc. XVI. Art. I.) legendum est *hujus naturæ*, non, *Ludus Naturæ*; sed, cùm hic error locum dederit Newtono respondendi, *inter* Ludos Naturæ *vix numeraverim* &c. (vide infra hoc ipso Opusculo Art. III.) illum reliquimus.

Hanc Curvam nec CARTESIUS, nec BEAUNIUS, nec quiſquam alius, (quod ſciam,) invenit. Ego verò quâ primùm die, imo horâ, cœpi quærere, ſtatim certâ Analyſi ſolvi. Fateor tamen nondum me, quicquid in hoc genere deſiderari poteſt, conſecutum: quanquam maximi momenti eſſe ſciam. Ac de his quidem nunc ſatis. &c.

ART. II.

EXCERPTUM

Ex Epiſtolâ TSCHÜRNHAUSII ad OLDEMBURGIUM.

Pariſiis. A. D. 1. Septembris 1679.

ADmodum oblectatus fui, hiiſce conſpectis, quæ ad LEIBNITIUM exarâſti; maximéque me tibi devinxiſti, quod me participem volueris facere tam ingenioſarum inventionum, & promotionis Geometriæ, tam pulchræ, quàm utilis. * *

Comm. Epiſt. Edit. ſecundæ pag. 141. Num. LIV.

Verùm, ut ad ſpecimina perquàm ingenioſa NEWTONI revertar, hæc non potuêre mihi non placere, tam ob utilitatem, quâ ſe tam latè ad quarumvis Quantitatum Dimenſiones, ac alia difficilia enodanda in Mathematicis extendunt, quàm ob deductionem harum à fundamentis non minùs generalibus, quàm ingenioſis, derivatam: non obſtante quòd exiſtimem, ad Quantitatem quamvis ad infinitam Seriem æquipollentem reducendam, fundamenta adhuc dari & ſimpliciora & univerſaliora, quàm ſunt Fractionum & Irrationalium reductio ad tales Series, ope Diviſionis aut Extractionis, quæ mihi tale quid, non niſi per accidens, præſtare videntur; cùm hæc ſucceſſum quoque habeant, licèt non adſint Fractiones aut irrationales Quantitates. Similia porrò, quæ in hac re præſtitit eximius ille Geometra GREGORIUS, memoranda certè ſunt, &c.

ART.

A R T. III.

ISAACI NEWTONI EPISTOLA POSTERIOR

A D

OLDEMBURGIUM

Cum LEIBNITIO communicanda

A. D. 24. Octob. 1676.

VIR DIGNISSIME

QUantâ cum voluptate legi Epistolas Clarissimorum virorum LEIBNITII & TSCHÜRNHAUSII vix dixerim.

Perelegans sanè est LEIBNITII Methodus perveniendi ad Series Convergentes: & satis ostendisset ingenium Auctoris, etsi nihil aliud scripsisset. Sed quæ alibi per Epistolam sparsit suo nomine dignissima, efficiunt etiam ut ab eo speremus maxima. Diversitas modorum, quibus eòdem tenditur, eo magis placuit, quòd mihi tres Methodi perveniendi ad ejusmodi Series innotuerant; adeò ut novam nobiscum communicandam vix expectarem.

Unam è meis priùs descripsi: jam addo aliam; illam, scilicet, quâ primùm incidi in has Series. Nam, incidi in eas, antequàm scirem Divisiones, & Extractiones Radicum, quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum est fundamentum Theorematis sub initio Epistolæ prioris positi, quod LEIBNITIUS à me desiderat.

Sub initio studiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in

in Opera Celeberrimi WALLISII nostri, considerando Series, quarum intercalatione ipse exhibet Aream Circuli, & Hyperbolæ; utpote, quòd in Serie Curvarum, quarum Basis, seu Axis communis sit $= x$, & ordinatim Applicatæ $= \overline{1 - xx}|^{\frac{0}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{1}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{2}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{3}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{4}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{5}{2}}$; $\overline{1 - xx}|^{\frac{6}{2}}$; &c. si Areæ alternarum, quæ sunt x; $x - \frac{1}{3}x^3$; $x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$; $x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$; &c., interpolari possent, haberemus Areas intermediarum, quarum prima $\overline{1 - xx}|^{\frac{1}{2}}$ est Circulus: ad has interpolandas notabam, quòd in omnibus, primus Terminus esset x, quòdque secundi Termini $\frac{0}{3}x^3$; $\frac{1}{3}x^3$; $\frac{2}{3}x^3$; $\frac{3}{3} \times x^3$; &c. essent in arithmeticâ Progressione; & proinde, quòd duo primi Termini Serierum intercalandarum deberent esse $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$; $x - \frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$; $x - \frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$; &c.

Ad reliquas intercalandas considerabam, quòd Denominatores 1; 3; 5; 7; &c. erant in arithmeticâ Progressione; adeóque soli Numeratorum Coefficientes numerales essent investigandæ. Hæ autem in alternis datis Areis erant Figuræ Potestatum Numeri undenarii; nempe 11^0; 11^1; 11^2; 11^3; 11^4; Hoc est primò 1; deinde 1, 1; tertiò, 1, 2, 1; quartò 1, 3, 3, 1; quintò 1, 4, 6, 4, 1; &c.

Quærebam itaque, quomodo, in his Seriebus, ex datis duabus primis Figuris reliquæ derivari possent. Et inveni, quòd positâ secundâ Figurâ m reliquæ producerentur per continuam multiplicacationem Terminorum hujus Seriei, $\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5}$; &c.

Exempli gratia; sit, (Terminus secundus), $m = 4$, & erit $4 \times \frac{m-1}{2}$, hoc est 6, tertius Terminus; & $6 \times \frac{m-2}{3}$, hoc est,

(4) quartus; & $4 \times \frac{m-3}{4}$, hoc eſt, 1, quintus; & $1 \times \frac{m-4}{5}$, hoc eſt, 0, ſextus; quo Series in hoc caſu terminatur.

Hanc Regulam itaque applicui ad Series interſerendas. Et, cùm, pro Circulo, ſecundus Terminus eſſet $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, poſui $m = \frac{1}{2}$; & prodierunt Termini $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$, ſive $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$, ſive $+\frac{1}{16}$; $+\frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$, ſive $-\frac{5}{128}$; & ſic in infinitum. Unde cognovi deſideratam Aream Segmenti circularis eſſe $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$; &c.

Et eâdem ratione prodierunt etiam interſerendæ Areæ reliquarum Curvarum: ut & Area Hyperbolæ, & ceterarum alternarum in hac Serie $\overline{1+xx}|^{\frac{0}{2}}$; $\overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}$; $\overline{1+xx}|^{\frac{2}{2}}$; $\overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$; &c.

Et eadem eſt ratio intercalandi alias Series; ídque per Intervalla duorum, pluriúmve, Terminorum ſimul deficientium.

Hic fuit primus meus ingreſſus in has meditationes, qui è memoriâ ſanè exciderat, niſi oculos in adverſaria quædam ante paucas ſeptimanas retuliſſem. Ubi verò hæc didiceram, mox conſiderabam Terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{6}{2}}$, &c.; hoc eſt, 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$, &c.; eodem modo interpolari poſſe ac Areas ab ipſis generatas: & ad hoc nihil aliud requiri, quàm omiſſionem Denominatorum, 1, 3, 5, 7, &c., in Terminis exprimentibus Areas; hoc eſt, Coefficientes Terminorum Quantitatis intercalandæ $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$, vel generaliter $\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam Multiplicationem Terminorum hujus Seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

Adeó-

Adeóque (exempli gratiâ) $\overline{1 - xx}|^{\frac{1}{2}}$, valeret $1 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$, &c.; Et $\overline{1 - xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1 - \frac{3}{2}xx + \frac{3}{8} \times x^4 + \frac{1}{16}x^6$, &c., Et $\overline{1 - xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$, &c.; Sic itaque innotuit mihi generalis Reductio Radicalium, in infinitas Series, per Regulam, quam posui initio Epistolæ prioris, antequam scirem Extractiones Radicum.

Sed, hac cognitâ, non potuit altera me diu latere. Nam, ut probarem has Operationes, multiplicavi $1 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$, &c., in se; & factum est $1 - xx$, Terminis reliquis in infinitum evanescentibus per continuationem Seriei. Atque ita $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$, &c., bis in se ductum produxit etiam $1 - xx$. Quod, ut certa fuerit harum conclusionum Demonstratio, sic me manuduxit ad tentandum è converso, num hæ Series, quas sic constitit esse Radices Quantitatis $1 - xx$, non possent inde extrahi more arithmetico. Et res benè successit. Operationis forma in quadraticis Radicibus hæc erat.

$$1 - xx \left(1 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \text{ \&c.} \right.$$

$$\begin{array}{l} 1 \\ \hline 0 - xx \\ -xx + \frac{1}{4}x^4 \\ \hline \quad -\frac{1}{4}x^4 \\ \quad -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8 \\ \hline \qquad -\frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8. \end{array}$$

His

His perſpectis neglexi penitus interpolationem Serierum, & has Operationes tanquam fundamenta magis genuina, ſolummodo adhibui. Nec latuit Reductio per Diviſionem, res utique facilior.

Sed & Reſolutionem affectarum Æquationum mox aggreſſus ſum, eámque obtinui. Unde ſimul ordinatim Applicatæ, Segmenta Axium, aliæque quælibet Rectæ, ex Areis Curvarum, vel Arcubus datis innotuêre. Nam, regreſſio ad hæc nihil indigebat præter Reſolutionem Æquationum, quibus Areæ, vel Arcus, ex datis Rectis dabantur.

Eo tempore peſtis ingruens, (quæ contigit annis 1665, 1666,) coëgit me hinc fugere, & alia cogitare. Addidi tamen ſubinde condituram quandam Logarithmorum ex Areâ Hyperbolæ, quam hìc ſubjungo.

Sit (*Fig.* 1.) *d*FD Hyperbola, cujus Centrum C, Vertex F, & Quadratum interjectum CAFE $= 1$. In AC cape AB, A*b*, hinc inde $= \frac{1}{10}$, ſeu, 0, 1: Et, erectis Perpendiculis BD, *bd*, ad Hyperbolam terminatis, erit ſemi-Summa ſpatiorum AD, & A*d* $= 0,1 + \frac{0,001}{3} + \frac{0,00001}{5} + \frac{0,0000001}{7}$, &c.; & ſemi-differentia $= \frac{0,01}{2} + \frac{0,0001}{4} + \frac{0,000001}{6} + \frac{0,00000001}{8}$, &c.

Quæ reductæ ſic ſe habent,

0, 1000000000000	0, 00500000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	1250
1111	100
9	1
0, 1003353477310.	0, 00502516792 67

Horum Summa 0, 1053605156577 eſt A*d*; & Differentia 0, 0953101798043 eſt AD. Et eâdem ratione, poſitis AB, A*b*, hinc inde $= 0, 2$; obtinebitur A*d* $= 0, 2231435513142$; & AD

AD = 0, 1823215567939. Habitis sic Logarithmis hyperbolicis Numerorum quatuor decimalium 0, 8; 0, 9; 1, 1; & 1, 2; cùm sit $\frac{1,2}{0,8} \times \frac{1,2}{0,9} = 2$; & 0, 8 & 0, 9 sunt minores Unitate; adde Logarithmos eorum ad duplum Logarithmi 1, 2; & habebis 0, 69314 71805597, Logarithmum hyperbolicum Numeri 2; Cujus triplo adde Logarithmum 0, 8, (siquidem sit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0,8} = 10$,) & habebis 2, 302585092993 3, Logarithmum Numeri 10; Indéque per Additionem simul, prodeunt Logarithmi Numerorum 9, & 11; Adeòque omnium primorum horum 2, 3, 5, 11, Logarithmi in promptu sunt. Insuper, ex solâ depressione Numerorum superioris computi per loca decimalia, & Additione, obtinentur Logarithmi Decimalium 0, 98; 0, 99; 1, 10; 1, 02; ut, & horum 0, 998; 0, 999; 1, 001; 1,002. Et inde, per Additionem & Subductionem, prodeunt Logarithmi primorum 7, 13, 17, 37, &c. Qui unà cum superioribus, per Logarithmum Numeri 10 divisi, evadunt veri Logarithmi in Tabulam inserendi. Sed hos postea propiùs obtinui.

Pudet dicere ad quot Figurarum loca has computationes otiosus eo tempore produxi. Nam, tunc sanè nimis delectabar inventis hisce. Sed ubi prodiit ingeniosa illa *Nicolaï* MERCATORIS Logarithmotechnia, (quem suppono sua primùm invenisse,) cæpi ea minus curare; suspicatus, vel eum nosse Extractionem Radicum æquè ac Divisionem Fractionum; vel alios saltem, Divisione patefactâ, inventuros reliqua, priusquàm ego ætatis essem maturæ adscribendum.

Eo ipso tamen tempore, quo Liber iste prodiit, communicatum est per Amicum BARROW (tunc Matheseos Professorem Cantabrigiensem) cum COLLINSIO Compendium * quoddam Methodi harum Serierum; in quo significaveram Areas, & Longitudines Curvarum omnium, & Solidorum Superficies, & Contenta, ex datis Rectis; & vice versa, ex his datis Rectas determinari posse, & Methodum ibi indicatam illustraveram diversis Seriebus.

Tt 3 Subo-

* Hoc compendium est Analysis per Æquationes numero Terminorum infinitas supra impressa.

Subortâ deinde inter nos Epiſtolari conſuetudine; Collinsius, Vir in rem Mathematicam promovendam natus, non deſtitit ſuggerere, ut hæc publici juris facerem. Et ante annos quinque (1671) cùm ſuadentibus Amicis conſilium ceperam edendi Tractatum de Refractione Lucis, & Coloribus, quem tunc in promptu habebam, cæpi de his Seriebus iterum cogitare, & Tractatum de iis etiam conſcripſi, ut utrumque ſimul ederem.

Sed, ex occaſione Teleſcopii Catadioptrici, Epiſtola ad te miſſa, quâ breviter explicui conceptus meos de naturâ Lucis, inopinatum quiddam effecit ut mei intereſſe ſentirem ad te feſtinanter ſcribere de impreſſione iſtius Epiſtolæ. Et ſubortæ ſtatim per diverſorum Epiſtolas (objectionibus aliiſque refertas) crebræ interpellationes me prorſùs à conſilio deterruerunt, & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quòd, umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorſùs ſubſtantialem.

Sub eo tempore *Jacobus* Gregorius, ex unicâ quâdam Serie è meis, quam Collinsius ad eum tranſmiſerat, poſt multam conſiderationem, (ut ad Collinsium reſcripſit,) pervenit ad eandem Methodum, & Tractatum de eâ reliquit, quem ſperamus ab Amicis ejus editum iri. Siquidem, pro ingenio, quo pollebat, non potuit non adjicere de ſuo nova multa, quæ rei Mathematicæ intereſt ut non pereant.

Ipſe autem Tractatum meum non penitus abſolveram, ubi deſtiti à propoſito; neque in hunc diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars ea, quâ decreveram explicare modum ſolvendi Problemata, quæ ad Quadraturas reduci nequeunt, licèt aliquid de fundamentis ejus poſuiſſem. Ceterùm, in Tractatu iſto, Series infinitæ non magnam partem obtinebant.

Alia haud pauca congeſſi, inter quæ erat Methodus ducendi Tangentes, quam ſolertiſſimus Slusius ante annos duos, treſve, tecum communicavit; de quâ tu (ſuggerente Collinsio) reſcripſiſti eandem mihi etiam innotuiſſe. Diverſâ ratione in eam incidimus. Nam, res non eget Demonſtratione, prout ego operor Habito meo fundamento, nemo potuit Tangentes aliter ducere, niſi volens de rectâ viâ deviaret.

Qui-

Quinetiam non hìc hæretur ad Æquationes Radicalibus unam, vel utramque indefinitam Quantitatem involventibus utcunque affectas; sed absque aliquâ talium Æquationum Reductione, (quæ opus plerumque redderet immensum,) Tangens confestim ducitur. Et eodem modo se res habet in quæstionibus de *maximis* & *minimis*; aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor.

Fundamentum harum Operationum, satis obvium quidem, (quoniam jam non possum explicationem ejus prosequi), sic potius celavi *6accdæ 13eff7i3l9n4o4qrr4s9t12vx*. *

Hoc fundamento conatus sum etiam reddere speculationes de Quadraturâ Curvarum simpliciores; perveníque ad Theoremata quædam generaliora. Et, ut candidè agam, ecce primum Theorema.

Ad Curvam aliquam sit $dz^{\theta} \times \overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda}$ Ordinatim Applicata, Termino Abscissæ seu Basis z normaliter insistens: ubi litteræ d, e, f, denotant quaslibet Quantitates datas; & θ, η, λ, Indices Potestatum sive Dignitatum Quantitatum, quibus affixæ sunt.

Fac $\frac{\theta+1}{\eta}=r$, $\lambda+r=s$, $\frac{d}{\eta f}\times\overline{e+fz^{\eta}}|^{\lambda+1}=Q$, & $r\eta-\eta=\varpi$; Et Area Curvæ erit Q in $\frac{z^{\varpi}}{s}-\frac{r-1}{s-1}\times\frac{eA}{fz^{\eta}}+\frac{r-2}{s-2}\times\frac{eB}{fz^{\eta}}-\frac{r-3}{s-3}\times\frac{eC}{fz^{\eta}}+\frac{r-4}{s-4}\times\frac{eD}{fz^{\eta}}$, &c., Litteris A, B, C, D, &c., denotantibus Terminos proximè antecedentes; nempe.

A Terminum $\frac{z^{\varpi}}{s}$.

B Terminum $-\frac{r-1}{s-1}\times\frac{eA}{fz^{\eta}}$; &c. Hæc Series, ubi r Fractio est vel Numerus negativus, continuatur in infinitum; ubi verò r integer est & affirmativus, continuatur ad tot Terminos tantùm, quot

* Hoc est; *Datâ Æquatione quotcunque Fluentes Quantitates involvente, Fluxiones invenire; & vice versâ.*

quot sunt Unitates in eodem r, & sic exhibet geometricam Quadraturam Curvæ. Rem exemplis illustro.

Exempl. I.

Proponatur Parabola, cujus ordinatim Applicata sit $\sqrt{az}$. Hæc in formam Regulæ reducta, fit $z^0 \times \overline{0 + az^1}|^{\frac{1}{2}}$. Quare, $d = 1$, $\theta = 0$, $e = 0$, $f = a$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeóque $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$, $\pi = 0$. Et erit Area quæsita $\frac{1}{a} \times az^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$; hoc est, $\frac{2}{3}\ z\sqrt{az}$. Et sic in genere, si cz^η ponatur ordinatim Applicata, prodibit Area $\frac{c}{\eta + 1}\ z^{\eta + 1}$.

Exemplum II.

Sit ordinatim Applicata $\frac{a^4 z}{c^4 - 2cczz + z^4}$. Hæc, per Reductionem, fit $a^4 z \times \overline{cc - zz}|^{-2}$; vel etiam $a^4 z^{-3} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-2}$. In priori casu est $d = a^4$, $\theta = 1$, $e = cc$, $f = -1$, $\eta = 2$, $\lambda = -2$. Adeóque $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2} \times \overline{cc - zz}|^{-1}$, hoc est, $-\frac{a^4}{2cc - 2zz}$; $\pi = 0$. Et Area Curvæ Q in $-\frac{z^0}{1}$, id est, $= \frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In secundo autem casu, est $d = a^4$, $\theta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $\eta = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = -\frac{a^4}{2cc} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-1}$, id est, $-\frac{a^4 zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\varpi = 0$. Et Area $=$ Q in $-\frac{z^0}{1}$, hoc est, $\frac{a^4 zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his casibus diversimode exhibetur; quatenus com-

computatur à diversis finibus, quorum assignatio per hos inventos valores Arearum facilis est.

EXEMPLUM III.

Sit ordinatim Applicata $\frac{a^5}{z^5}\sqrt{bz+zz}$; hoc est, per Reductionem ad debitam formam, vel $a^5 z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b+z}|^{\frac{1}{2}}$, vel $a^5 z^{-4} \times \overline{1+bz^{-1}}|^{\frac{1}{2}}$. Erit in priori casu $d=a^5$, $\theta=-\frac{9}{2}$, $e=b$, $f=1$; $\eta=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$. Adeóque $r=-\frac{7}{2}$ &c. Quare, cùm r non sit Numerus affirmativus, procedo ad alterum casum. Hic est $d=a^5$, $\theta=-4$, $e=1$, $f=b$, $\eta=-1$, $\lambda=\frac{1}{2}$. Adeóque $r=3$, $f=3\frac{1}{2}$, $Q=-\frac{a^5}{b}\times\overline{1+bz^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$, seu, $-\frac{a^5z+a^5b}{bzz}\times\sqrt{zz+bz}$, $\pi=-2$. Et Area Q in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}}\times\frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b}+\frac{1}{1\frac{1}{2}}\times\frac{2}{2\frac{1}{2}}\times\frac{z^0}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc est, $=\frac{-30bb+24bz-16zz}{105bbzz}$ in $\frac{a^5z+a^5b}{bzz}\times\sqrt{zz+bz}$.

EXEMPLUM IV.

Sit denique ordinatim Applicata $\frac{bz^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[5]{c^3-3accz^{\frac{2}{3}}+3aacz^{\frac{4}{3}}-a^3zz}}$:

Hæc, ad formam Regulæ reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}}\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Indéque est $d=b$, $\theta=\frac{1}{3}$, $e=c$, $f=-a$, $\eta=\frac{2}{3}$, $\lambda=-\frac{3}{5}$, $r=2$, $f=\frac{7}{5}$, $Q=-\frac{3b}{2a}\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$, $\pi=\frac{2}{3}$. Et Area $Q\times\frac{5z^{\frac{2}{3}}}{7}-\frac{5}{2}\times-\frac{5c}{7a}$, id est, $-\frac{30abz^{\frac{2}{3}}+75bc}{28aa}\times\overline{c-az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$.

 Quòd,

Quòd, si res non successisset in hoc casu, existente r vel Fractione, vel Numero negativo, tunc tentâssem alterum casum, purgando Terminum $-az^{\frac{2}{3}}$ in ordinatim Applicatâ à Coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$; hoc est, reducendo ordinatim Applicatam ad hanc formam, $bz^{-\frac{1}{15}} \times \overline{-a + cz^{-\frac{2}{3}}}\big|^{-\frac{3}{5}}$. Et, si r in neutro casu fuisset Numerus integer & affirmativus, conclusissem Curvam ex earum numero esse, quæ non possunt geometricè quadrari. Nam, quantùm animadverto, hæc Regula exhibet in infinitis Æquationibus Areas omnium geometricam Quadraturam admittentium Curvarum, quarum ordinatim Applicatæ constant ex Potestatibus, Radicibus, vel quibuslibet Dignitatibus Binomii cujuscunque; licèt non directè, ubi Index Dignitatis est Numerus integer.

At quando hujusmodi Curva aliqua non potest geometricè quadrari; sunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum conicis Sectionibus, vel saltem cum aliis Figuris simplicissimis, quibuscum potest comparari: ad quod sufficit etiam hoc ipsum unicum jam descriptum Theorema, si debitè concinnetur.

Pro Trinomiis etiam, & aliis quibusdam Regulas quasdam concinnavi.

Sed in simplicioribus vulgóque celebratis Figuris vix aliquid relatu dignum reperi, quod evasit aliorum conatus, nisi fortè Longitudo Cissoidis ejusmodi censeatur. Ea sic construitur.

Sit (*Fig.* 2.) VD Cissois, AV Diameter Circuli, ad quem aptatur, V vertex, AF Asymptotos ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semi-axe AF = AV, & semi-parametro AG = $\frac{1}{3}$ AV, describatur Hyperbola F*k*K; & inter AB & AV sumptâ AC mediâ proportionali, erigantur ad C & V Perpendicula C*k*, VK, Hyperbolæ occurrentia in *k* & K; Et agantur Rectæ KT, *kt*, tangentes Hyperbolam in eisdem K, & *k*, & occurrentes AV in T & *t*, & ad AV constituatur Rectangulum AVNM æquale Spatio TK*kt*. Et Cissoidis VD Longitudo erit sextupla Altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est. Sed ad infinitas Series redeo.

Quam-

Quamvis multa reſtent inveſtiganda circa modos approximandi, & circa diverſa Serierum genera quæ poſſunt ad id conducere: tamen vix cum Tschürnhausio ſperaverim dari poſſe, aut ſimpliciora, aut magis generalia fundamenta reducendi Quantitates ad hoc genus Serierum, de quo agimus, quàm ſunt Diviſiones & Extractiones Radicum, quibus Leibnitius & ego utimur; ſaltem non generaliora: quia pro Quadraturâ & ευθύνσει Curvarum, ac ſimilibus, nullæ poſſunt dari Series ex hiſce ſimplicibus Terminis algebraïcis, (unicam tantùm indefinitam Quantitatem involventibus,) conſtantes, quas non licet hac Methodo colligere.

Nam, non poſſunt eſſe plures convergentes Series ad idem determinandum, quàm ſunt indefinitæ Quantitates, ex quarum Poteſtatibus Series conflentur: & ego quidem ex adhibitâ quacunque indefinitâ Quantitate Seriem novi colligere; & idem credo Leibnitio in poteſtate eſſe.

Nam, quamvis meâ Methodo liberum ſit eligere, pro conflandâ Serie, Quantitatem quamlibet indefinitam, à quâ Quæſitum dependeat; & Methodus, quam ipſe nobiſcum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum Quantitatum, quibus opus commodè deduci poteſt ad Fractiones; quæ per ſolam Diviſionem evadant Series infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ Quantitates pro Seriebus conflandis adhiberi poſſunt, per Methodum iſtam, quâ affectæ Æquationes reſolvuntur; dummodo reſolvantur in propriis Terminis; hoc eſt, conficiendo Seriem ex ſolis Terminis, quos Æquatio involvit.

Præterea, non video cur dicatur his Diviſionibus & Extractionibus Problemata reſolvi *per accidens*: ſiquidem hæ Operationes eodem modo ſe habeant ad hoc genus Algebræ, ac vulgares Operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgò notam.

Quod autem ad ſimplicitatem Methodi attinet; nolim Fractiones, & Radicales abſque prævià Reductione ſemper reſolvi in Series infinitas: Sed ubi perplexæ Quantitates occurrunt; tentandæ ſunt omnimodæ Reductiones; ſive fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo Quantitates indefinitas; ſive per Methodum tranſmutatoriam Leibnitii, aut alio quocunque modo, qui oc-

 currat.

currat. Et tunc Resolutio in Series per Divisionem & Extractionem opportunè adhibebitur.

Hìc autem præcipuè nitendum est, ut Denominatores Fractionum, & Quantitates in Vinculo Radicum, reducantur ad quàm-paucissimas, & minimè compositas; & ad tales etiam, quæ in Seriem abeunt citissimè convergentem, etsi Radices neque convertantur in Fractiones, neque deprimantur. Nam, per Regulam initio alterius Epistolæ, Extractio altissimarum Radicum æquè simplex; & facilis est, ac Extractio Radicis quadraticæ, vel Divisio: & Series, quæ per Divisionem eliciuntur, solent minimè omnium convergere.

Hactenus de Seriebus unicam indefinitam Quantitatem involventibus locutus sum. Sed possunt etiam, perspectâ Methodo, Series ex duabus, vel pluribus assignatis indefinitis Quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam, beneficio ejusdem Methodi possunt Series ad omnes Figuras efformari, *Gregorianis* ad Circulum & Hyperbolam editis affines; hoc est, quarum ultimus Terminus exhibebit quæsitam Aream. Sed calculum hìc onerosiorem nolim lubens subire.

Possunt denique Series ex Terminis compositis eâdem Methodo constitui. Quemadmodum, si sit $\sqrt{aa - ax + \frac{x^3}{a}}$ ordinatim Applicata Curvæ alicujus; pono $aa - ax = zz$, & ex Binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extractâ Radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$, &c. Cujus Seriei omnes Termini quadrari possunt per Theorema jam antè descriptum. Sed hæc minoris facio, quòd ubi Series simplices non sunt satìs tractabiles, aliam nondum communicatam Methodum habeo, quâ pro libitu acceditur ad quæsitum.

Ejus fundamentum est commoda, expedita, generalis Solutio hujus Problematis.

Curvam geometricam describere, quæ per data quotcunque Puncta transibit.

Docuit EUCLIDES descriptionem Circuli per tria data Puncta. Potest etiam conica Sectio describi per quinque data Puncta: Et Cur-

væ

va trium Dimenſionum per ſeptem data Puncta: adeò ut in poteſtate habeam deſcriptonem omnium Curvarum iſtius ordinis, quæ per ſeptem tantùm Puncta determinantur. Hæc ſtatim geometricè fiunt, nullo calculo interpoſito. Sed ſuperius Problema eſt alterius generis: & quamvis primâ fronte intractabile videatur, tamen res aliter ſe habet. Eſt enim ferè ex pulcherrimis quæ ſolvere deſiderem.

Seriei à LEIBNITIO pro quadraturâ conicarum Sectionum propoſitæ, affinia ſunt Theoremata quædam, quæ pro comparatione Curvarum cum conicis Sectionibus in catalogum dudum retuli.

Poſſum utique cum Sectionibus conicis geometricè comparare Curvas omnes, (numero infinities infinitas,) quarum ordinatim Applicatæ ſunt.

$$\frac{dz^{n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}};\ \&c.$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}} \text{ vel } \frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e+fz^{n}+gz^{2n}};\ \&c.$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}} \text{ vel } dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}};\ \&c.$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{e+fz^{n}+gz^{2n}}};\ \&c.$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}}}{g+hz^{n}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}\times\sqrt{e+fz^{n}}}{g+hz^{n}};\ \&c.$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}}{g+hz^{n}\times\sqrt{e+fz^{n}}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{g+hz^{n}\times\sqrt{e+fz^{n}}};\ \&c.$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\,\frac{\sqrt{e+fz^{n}}}{g+hz^{n}} \text{ vel } dz^{n-1}\,\frac{\sqrt{e+fz^{n}}}{g+hz^{n}};\ \&c.$$

Hic d, e, f, g significant quasvis datas Quantitates cum suis signis + & — affectas; z Axem, vel Basem Curvæ; & n, 2n, $\frac{1}{2}$n — 1, $\frac{3}{2}$n — 1, n — 1, 2n — 1 Indices Potestatum vel Dignitatum z, sive sint affirmativi vel negativi, sive integri, vel fracti, & singula bina Theoremata sunt duo primi Termini Seriei in infinitum progredientis.. In tertio & quarto, $4eg$ debet esse non majus quàm ff, nisi e & g sint contrarii signi. In ceteris nulla est limitatio. Horum aliqua, (nempe, secundum, tertium, quartum, quintum & decimum tertium,) ex Areis duarum conicarum Sectionum conjunctis constant. Alia quædam, (ut nonum, decimum, & duodecimum,) sunt aliter satis composita. Et omnia quidem in continuatione Progressionum citò evadunt compositissima; adeò ut vix per Transmutationem Figurarum, quibus *Jacobus* GREGORIUS, & alii usi sunt, absque ulteriori fundamento inveniri posse putem.

Ego quidem hand quicquam generale in his obtinere potui, antequàm abstraherem à contemplatione Figurarum, & rem totam ad simplicem considerationem solarum ordinatim Applicatarum reducerem. Sed, cum hæc, & hisce generaliora, sint in potestate; non dubitabitur, credo de Binomialibus longè facilioribus, quæ in his continentur, & prodeunt ponendo Litteram aliquam e vel f vel $g = 0$, & n = 1 vel 2; etsi Series, in quas ista resolvantur, non posuerim in Epistolâ priori, nedum fortè computaverim; intentus, non in omnia particularia enumeranda, sed in illustrandam Methodum per unam & alteram in singulis rerum generibus instantiam, quæ ad ostendendam ejus generalitatem sufficere videbatur.

Ceterùm, hæc Theoremata dant Series plusquàm uno modo. Nam, primùm, si ponatur $f = 0$, & n = 1, evadit $\frac{d}{e + gzz}$; unde prodit Series nobis communicata. Sed, si ponatur $2eg = ff$, & n = 1; inde tandem obtinemus hanc Seriem $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$; &c. pro Longitudine quadrantalis Arcûs,

cûs, cujus chorda eſt Unitas: vel, quod perinde eſt, hanc $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255}$, &c. pro Longitudine dimidii ejus. Et has fortè, quia æquè ſimplices ſunt ac alteræ, & magis convergunt, non repudiabitis.

Sed ego rem aliter æſtimo. Illud enim melius quod utilius eſt, & Problema minori labore ſolvit. Sic, quamvis hæc Æquatio $x^2 - x = 1$ appareat ſimplicior hacce $yy - 2y\sqrt{\frac{81}{25} - \sqrt{20}} = \sqrt{20}$; tamen in confeſſo eſt poſteriorem reverá ſimpliciorem eſſe, propterea quod Radicem ejus y Geometra faciliùs eruit.

Et ob hanc rationem, Series pro obtinendis Arcubus Circuli vel, (quod eodem recidit,) pro obtinendis Sectoribus conicarum Sectionum, pro optimis habeo, quæ componuntur ex Poteſtatibus Sinuum.

Nam, ſiquis vellet per ſimplex computum hujus Seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, + &c. colligere Longitudinem Quadrantis ad viginti Figurarum loca decimalia, opus eſſet 5 000 000 000. Terminis Seriei, circiter; ad quorum calculum milleni anni requirerentur. Et res tardiùs obtineretur per Tangentem 45 Graduum. Sed, adhibito Sinu recto 45 Graduum, quinquaginta quinque vel ſexaginta Termini hujus Seriei $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}$, &c. ſufficerent: quorum computatio tribus, ut opinor, vel quatuor diebus abſolvi poteſt.

Et tamen hic non eſt optimus modus computandi totam Peripheriam. Nam, Series ex Sinu recto 30 Graduum, vel Sinu verſo 60 Graduum conflata, multò citiùs dabit Arcum ſuum; cujus ſextuplum, vel duodecuplum eſt tota Peripheria. Neque majori labore eruitur Area totius Circuli ex Segmento, cujus Sagitta eſt Quadrans Diametri. Ejus computi Specimen, ſiquidem ad manus eſt, viſum fuit apponere; & unà adjungere Aream Hyperbolæ, quæ eodem calculo prodit.

Poſito

Posito Axe transverso $= 1$, & Sinu verso, seu Segmenti Sagittâ $= x$; erit Semi-segmentum

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{array}\right\} = x^{\frac{1}{2}} \text{ in } \frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}, \text{ \&c.}$$

Hæc autem Series sic in infinitum producitur; sit $2x^{\frac{3}{2}} = a$, $\frac{ax}{2} = b$, $\frac{bx}{4} = c$, $\frac{3cx}{6} = d$, $\frac{5dx}{8} = e$, $\frac{7cx}{10} = f$; &c.; Et erit Semi-segmentum

$$\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolæ}\\ \text{Circuli}\end{array}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}, \text{ \&c.},$$

Eorùmque semi-Summa $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11} -$, &c. & semi-Differentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13} +$, &c. His ita præparatis, supono $x = \frac{1}{4}$, Quadrantem nempe Axis; & prodit $a \left(= \frac{1}{4}\right) = 0,25$; $b \left(= \frac{ax}{2} = \frac{0,25}{1 \times 8}\right) = 0,03125$; $c \left(= \frac{bx}{4} = \frac{0,03125}{2 \times 8}\right) = 0,001953125$; $d \left(= \frac{3cx}{6} = \frac{0,001953125}{8}\right) = 0,000244140625$. Et sic procedo usquedum venero ad Terminum depressissimum, qui potest ingredi opus. Deinde hos Terminos per 3, 5, 7, 9, 11, &c. respectivè divisos dispono in duas Tabulas: ambiguos cum primo in unam; & negativos in aliam; & addo, ut hìc vides;

0,0833333333333333	0,0002790178571429
6250000000000	3467906605 1
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	0,0002825719389575
1	
0,0896109885646618	

Tunc

Tunc à priori Summâ aufero posteriorem, & restat 0,0893284 166257043, Area semi-Segmenti Hyperbolici. Addo etiam eas Summas, & Aggregatum aufero à primo Termino duplicato 0,166 6666666666666, & restat 0,0767731061630473, Area semi-Segmenti circularis. Huic addo Triangulum istud, quo completur in Sectorem, hoc est, $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, seu 0,0541265877365274, & habeo Sectorem sexaginta Graduum, 0,1308996938995747; cujus sextuplum 0,785398163397448 est Area totius Circuli. Quæ divisa per $\frac{1}{4}$, sive Quadrantem Diametri, dat totam Peripheriam 3,141.592.653.589.7928; si alias artes adhibuissem, potui per eundem Numerum Terminorum Seriei pervenisse ad multò plura loca Figurarum, puta, viginti quinque aut ampliùs: sed animus fuit hìc ostendere, quid per simplex Seriei computum præstari posset. Quod sanè haud difficile est, cùm in omni opere Multiplicatores ac Divisores magnâ ex parte non majores quàm 11, & nunquam majores quàm 41 adhibere opus sit.

Per Seriem LEIBNITII etiam, si ultimo loco dimidium Termini adjiciatur, & alia quædam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas Figuras. Ut, & ponendo Summam Terminorum $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33}$; &c. esse ad totam Seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$, &c., ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus usus videtur esse quando, vel conjungitur cum duabus aliis persimilibus, & citissimè convergentibus Seriebus, vel sola adhibetur ad computandum Arcum 30 Graduum, positâ Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim Series illa evadit $1 - \frac{1}{3\times3} + \frac{1}{5\times9} - \frac{1}{7\times27} + \frac{1}{9\times81}$, &c., quæ citò convergit. Vel, si conjunges cum aliis Seriebus, pone Circul

Diametrum $= 1$, & $a = \frac{1}{2}$; & Area totius Circuli erit Summa harum trium ſerierum $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} + \frac{a^9}{9} - \frac{a^{11}}{11} +$, &c.

$\frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11}$, &c.

$\frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9}$, &c.

Hìc conſideravimus Series, quatenus adhibentur ad computandum totum Circulum. Sed, quando computandæ ſunt partes ejus, tunc quælibet Series habet proprium uſum, & in ſuo genere optima eſt. Si datur Tangens ſatìs parva, vel ſatìs magna, non recurrendum erit ad Sinum aliquem, ut inde computetur Arcus, neque vice verſâ. Series dato congruens eſt Æquatio pro ſolvendo proprio Problemate.

Credo Cl. LEIBNITIUM, dum poſuit Seriem pro determinatione Co-ſinûs ex Arcu dato, vix animadvertiſſe Seriem meam pro determinatione Sinûs verſi ex eodem Arcu; ſiquidem hæc idem ſunt.

Neque obſervâſſe videtur morem meum generaliter uſurpandi Litteras pro Quantitatibus cum ſignis + & — affectis, dum dividit hanc Seriem $\frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} +$, &c. Nam, cùm Area hyperbolica (*Fig.* 3.) BE, hìc ſignificata per z ſit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex unâ vel alterâ parte ordinatim Applicatæ BC; ſi Area illa in Numeris data ſit l; & l ſubſtituatur in Serie pro z, orietur vel $\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} + \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$, &c., vel $-\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$, &c., prout l ſit affirmativa, vel negativa; hoc eſt, poſito $a = 1 = b$, & l Logarithmo hyperbolico, Numerus ei correſpondens erit $1 + \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$, &c., ſi l ſit affirmativus; & $1 - \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$, &c., ſi l ſit negativus. Hoc modo fugio Multiplicationem Theorematum,

rematum, quæ aliàs in nimiam molem crefcerent. Nam, verbi-gratiâ illud unicum Theorema, quod fupra pofui pro Quadraturâ Curvarum, refolvendum effet in triginta duo Theoremata, fi pro fignorum varietate multiplicaretur.

Præterea, quæ habet Vir clariffimus de inventione Numeri Unitate majoris per datum Logarithmum hyperbolicum, ope Seriei $\frac{l}{1} - \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} - \frac{l^4}{1\times2\times3\times4} +$, &c., potiùs quàm ope Seriei $\frac{l}{1} + \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$, &c., nondum percipio. Nam, fi unus Terminus adjiciatur ampliùs ad Seriem pofteriorem, quàm ad priorem, pofterior magis appropinquabit. Et certè minor eft labor computare unam vel duas primas Figuras adjecti hujus Termini, quàm dividere * Unitatem per Numerum prodeuntem ex Logarithmo hyperbolico ad multa Figurarum loca extenfum, ut inde habeatur Numerus quæfitus Unitate major. Utraque igitur Series, (fi duas dicere fas fit,) officio fuo fungatur. Poteft tamen $\frac{l}{1} + \frac{l^3}{1\times2\times3} + \frac{l^5}{1\times2\times3\times4\times5}$, &c., Series, ex dimidiâ parte Terminorum conftans, optimè adhiberi; fiquidem hæc dabit femi-Differentiam duorum Numerorum, ex quâ, & Rectangulo dato uterque datur. Sic, & ex Serie $1 + \frac{ll}{1\times2} + \frac{l^4}{1\times2\times3\times4}$, &c., datur femi-Summa Numerorum, indéque etiam Numeri. Unde prodit Relatio Serierum inter fe, quâ ex unâ datâ dabitur altera.

Theorema de inventione Arcûs ex dato Co-finu ponendo Radium $=1$, Co-finum $=c$, & Arcum $=\sqrt{6-\sqrt{24c+12}}$; minùs appropinquat quàm primâ fronte videtur. Pofito quidem Sinu verfo

* Hæc Epiftola habetur etiam in WALLISII Operibus Mathematicis Tom. III. pag. 634. Ibi autem legitur, *quàm dividere Unitatem per prodeuntem Logarithmum hyperbolicum ad multa Figurarum loca extenfum, ut inde habeatur Logarithmus hyperbolicus quæfitus.*

verſo $= v$, error erit $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194} +$ &c. Poteſt fieri, ut $120 - 27v$ ad $120 - 17v$, ita Chorda ($\sqrt{2v}$) ad Arcum; & error erit tantùm $\frac{61v^3\sqrt{2v}}{44800}$, circiter; qui ſemper minor eſt quàm $5\frac{1}{4}$ Minuta ſecunda, dum Arcus non ſit major quàm 45 Grad. Et ſingulis etiam biſectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1\times 2\times 3} - \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \frac{a^7}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7}$, &c. applicari poſſet ad computationem Tabulæ Segmentorum, ut obſervat Vir Clariſſimus; ſed res optimè abſolvitur per Canonem Sinuum. Utpote, cognitâ Quadrantis Areâ, per continuam Additionem nonæ partis ejus, habebis Sectores ad ſingulos decem Gradus in Semicirculo: deinde per continuam Additionem decimæ partis hujus, habebis Sectores ad gradus; & ſic ad decimas partes Graduum, & ultra procedi poteſt. Tunc, Radio exiſtente $= 1$, ab unoquoque Sectore & ejus Complemento ad 180 Gradus, aufer dimidium communis Sinûs recti, & relinquentur Segmenta in Tabulam referenda. Ceterùm, quamvis Series hìc non proſint, in aliis tamen locum obtinent. Et quoniam hoc ad earum uſum ſpectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Conſtructionem Logarithmorum non aliunde peti debere credetis forte, ex hoc ſimplici proceſſu, qui ab iſtis pendet. Per Methodum ſuprà traditam quærantur Logarithmi hyperbolici numerorum 10; 0, 98; 0, 99; 1, 01; 1, 02: id, quod fit ſpatio unius & alterius horæ. Dein, diviſis Logarithmis quatuor poſteriorum per Logarithmum Numeri 10, & addito Indice 2, prodibunt veri Logarithmi Numerorum 98; 99; 100; 101; 102; in Tabulam referendi. Hi per dena Intervalla interpolandi ſunt, & exibunt Logarithmi omnium Numerorum inter 980, & 1020: & omnibus inter 980, & 1000 iterum per dena Intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus conſtructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium primorum Numerorum, & eorum multiplicium, minorum quàm 100: ad quod nihil requiritur præter Additionem

&c.

& Subtractionem. Siquidem, sit $\sqrt[10]{\frac{9984 \times 1020}{9945}} = 2$; $\sqrt[4]{\frac{8 \times 9963}{984}} = 3$; $\frac{10}{2} = 5$; $\sqrt{\frac{98}{2}} = 7$; $\frac{99}{9} = 11$; $\frac{1001}{7 \times 11} = 13$; $\frac{102}{6} = 17$; $\frac{988}{4 \times 13} = 19$; $\frac{9936}{16 \times 27} = 23$; $\frac{986}{2 \times 17} = 29$; $\frac{992}{32} = 31$; $\frac{999}{27} = 37$; $\frac{984}{24} = 41$; $\frac{989}{23} = 43$; $\frac{987}{21} = 47$; $\frac{9911}{11 \times 17} = 53$; $\frac{9971}{13 \times 13} = 59$; $\frac{9882}{2 \times 81} = 61$; $\frac{9849}{3 \times 49} = 67$; $\frac{994}{14} = 71$; $\frac{9928}{8 \times 17} = 73$; $\frac{9954}{7 \times 18} = 79$; $\frac{996}{12} = 83$; $\frac{9968}{7 \times 16} = 89$; $\frac{9894}{6 \times 17} = 97$. Et habitis sic Logarithmis omnium Numerorum minorum quàm 100; restat tantùm hos etiam semel atque iterum per dena intervalla interpolare.

Constructionis Tabulæ Sinum, à quâ pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum est continua Additio dati Anguli ad seipsum vel ad alium datum. Utpote, in Angulo (*Fig.* 4.) addendo BAE, inscribantur HI, IK, KL, LN, MN, NO, OP, &c., æquales Radio AB, & ad opposita Latera demittantur perpendiculares BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY, &c. Et Angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK, &c., differentiæ erunt Angulus A, Sinus HQ, IR, KS &c., & Co-sinus IQ, KR, LS, &c. Detur jam aliquis eorum LMK, & ceteri sic eruentur. Ad SV, & MV, demitte Perpendicula Ta & Kb; &, (propter similia Triangula ABE, TLa; KMb, ALT, AMV, &c.;) erit $AB. BE :: TL. La \left(= \frac{SL - LV}{2}\right) :: KT \left(= \frac{1}{2} KM\right). \frac{1}{2} Mb \left(= \frac{MV - KS}{2}\right)$. Et $AB. AE :: KT. Sa \left(= \frac{SL + LV}{2}\right) :: TL. Ta \left(= \frac{KS + MV}{2}\right)$. Unde dantur Sinus & Co-sinus KS,

 MV,

MV, SL, LV. Et simul patet ratio continuandi Progressiones. Nempe, AB. 2AE :: LV. TM + MX :: MX. VN + NY, &c. :: MV. TL + XN :: XN. MV + OY, &c.; vel AB. 2BE :: LV. XN — TL :: MV. TM — MX :: MX. OY — MV :: XN. VN — NY, &c. Et retrò AB. 2AE :: LS. KT + RK, &c. Pone ergo $AB = 1$, & fac $BE \times TL = La$; $AE \times KT = Sa$; $Sa - La = LV$; $2AE \times LV - TM = MX$, &c. sed nodus est inventio Sinûs & Co-sinûs Anguli A. Et hic subveniunt Series nostræ. Utpote, cognitâ ex superioribus quadrantalis Arcûs Longitudine 1, 57079, &c., & simul Quadrato ejus 2, 4694, &c., divide Quadratum hoc per Quadratum Numeri exprimentis Rationem nonaginta Graduum ad Angulum A; &, Quoto dicto z, tres vel quatuor Termini hujus Seriei $1 - \frac{z}{2} + \frac{zz}{24} - \frac{z^3}{720} + \frac{z^4}{40320}$, &c., dabunt Co-sinum istius Anguli A. Sic, primò quæri potest Angulus quinque Graduum, & inde Tabula computari ad quinos Gradus; ac deinde interpolari ad Gradus vel dimidios Gradus per eandem Methodum. Nam, non convenit progredi per nimios saltus. Duæ tertiæ partes Tabulæ, sic computatæ, dant reliquam tertiam partem, per Additionem vel subtractionem, more noto. Siquidem, posito KT Co-sinu sexaginta Graduum, sit $AE = SV$, & $BE = Mb$. Tunc ad decimas & centesimas partes Graduum pergendum est per aliam Methodum: substitutis tamen priùs Logarithmis Sinuum inventorum, si ejus generis Tabula desideretur.

Ad computum Tabularum astronomicarum KEPLERI, posui fundamentum aliquod in alterâ Epistolâ. Ejus Seriei tres primi Termini, & aliquando duo sufficiunt. Sed ad diversas partes Ellipseos diversæ ejusmodi Series aptari debent. Vel potiùs tales Series computandæ sunt, quæ ex datâ Areâ Sectoris elliptici BGE, immediatè exhibeant Aream Sectoris Circuli, cujus Angulus est BEG, Radius CB. Et habitis hisce, computum earum ad duos, tres, aut fortè quatuor Terminos, beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quàm solita Resolutio tot Triangulorum in aliis hypothesibus: Imò fortè minus grave, si Series priùs debitè concinnentur; siquidem unus Logarithmus è Tabulâ petitus determinet omnes istos Ter-

Terminos, addendo ipſum & ejus multiplices ad Logarithmos datarum Coefficientium in promptu habitos.

Quæ de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri poſſunt, ubi ratiocinia Geometrica, locum non obtinent. Sufficit autem per has Series computare triginta, vel viginti, aut fortè pauciores Terminos Tabulæ in debitis diſtantiis: ſiquidem Termini intermedii facilè interſeruntur per Methodum quandam, quam in uſum Calculatorum ferè hìc deſcripſiſſem; Sed pergo ad alia.

Quæ Cl. Leibnitius à me deſiderat explicanda, ex parte ſupra deſcripſi. Quod verò attinet ad inventionem Terminorum p, q, r in Extractione Radicis affectæ: primùm p ſic eruo. Deſcripto Angulo recto BAC, Latera ejus BA, CA, divido in partes æquales; & inde Normales erigo diſtribuentes Angulare ſpatium in æqualia Parallelogramma, vel Quadrata,

B

x^5	x^5y	x^5yy	x^5y^3	x^5y^4	x^5y^5	x^5y^6	x^5y^7
x^4	x^4y	x^4yy	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6	x^4y^7
x^3	x^3y	x^3yy	x^3y^3	x^3y^4	x^3y^5	x^3y^6	x^3y^7
xx	xxy	$xxyy$	xxy^3	xxy^4	xxy^5	xxy^6	xxy^7
x	xy	xyy	xy^3	xy^4	xy^5	xy^6	xy^7
o	y	yy	y^3	y^4	y^5	y^6	y^7

A C

quæ concipio denominata eſſe à Dimenſionibus duarum indefinitarum Specierum, puta, x, & y regulariter aſcendentium à Termino A; prout vides in Figurâ ſuperiore, inſcriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; & x alteram indefinitam Quantitatem, ex cujus Poteſtatibus Series conficienda eſt. Deinde, cùm Æquatio aliqua proponitur, Parallelogramma ſingulis ejus Terminis correſpondentia inſignio notâ aliquâ; & Regulâ ad duo, vel fortè plura, ex inſignitis Parallelogrammis applicatâ, (quorum unum ſit humillimum in Columnâ ſiniſtrâ juxta AB, & alia ad Regulam dextrorſum ſita, ceteráque omnia non contingentia Regulam ſupra eam jaceant,) ſeligo Terminos Æquationis per Parallelogramma contin-

tingentia Regulam designatos, & inde quæro Quantitatem Quotienti addendam.

Sic, ad extrahendam Radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7aaxxyy + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$; Parallelogramma hujus Terminis respondentia signo notâ aliquâ *; ut vides in Fig. quintâ. Dein applico Regulam DE ad inferiorem è locis signatis in sinistrâ Columnâ; eámque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter, vel fortè plura è reliquis signatis locis, cœperit attingere. Videóque loca sic attacta esse x^3, $xxyy$, & y^6. Et Terminis itaque, $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$, tanquam nihilo æqualibus, (& insuper, si placet, reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo Termino Quotientis accipere licet, prout è Radicibus quampiam extrahere decretum est.

Sic, Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam resolvebam in priori Epistolâ, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$, proximè: Cùm itaque a sit primus Terminus valoris y, pono p pro ceteris omnibus in infinitum, & substituo $a + p = y$, (Obvenient hìc aliquando difficultates nonnullæ; sed ex iis, credo, LEIBNITIUS se proprio Marte extricabit.) Subsequentes verò Termini q, r, s, &c., eodem modo ex Æquationibus secundis, tertiis, ceterísque eruuntur, quo primus p è primâ, sed curâ leviori; quia ceteri valores y solent prodire dividendo Terminum involventem infimam Potestatem indefinitæ Quantitatis x per Coefficientem Radicis p, q, r, aut s.

Intellêxti, credo, ex superioribus, regressionem ab Areis Curvarum ad Lineas rectas, fieri per hanc Extractionem Radicis affectæ. Sed duo alii sunt modi, quibus idem perficio.

Eorum unus affinis est computationibus, quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolæ, & intelligi potest per hoc Exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$, &c. Et, partibus ejus multiplicatis

tiplicatis in se, emerget $zz = xx + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$, &c., $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$, &c.; $z^4 = x^4 + 2x^5$, &c.; $z^5 = x^5$, &c. Jam, de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & restat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6} \times x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$, &c. Huic addo z^3, & fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$, &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & restat $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$, &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quamproximè; sive $x = z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$, &c.

Eodem modo, Series de unâ indefinitâ Quantitate in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r Radio Circuli, x Sinu recto Arcûs z, & $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ &c. Longitudine Arcûs istius; atque hanc Seriem à Sinu recto ad Tangentem vellem transferre; Quæro Longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4} +$ &c. Vocetur hæc Quantitas $= t$. Colligo Potestates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$, &c.; $t^5 = x^5 +$ &c. Aufero autem t de z, & restat $z - t = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{10}x^5 -$ &c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & restat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$, quamproximè. Quare est $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 -$ &c. Sed, siquis in usus

trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem Arcûs per Tangentem; eam non hoc circuitu, ſed directâ Methodo quæſiviſſem.

Per hoc genus computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis Quantitatibus conſtantes; & Radices affectarum Æquationum magnâ ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potiùs Methodum in alterâ Epiſtolâ deſcriptam, tanquam generaliorem, &, (Regulis pro Eliſione ſuperfluorum Terminorum habitis,) paulò magis expeditam.

Pro Regreſſione verò ab Areis ad Lineas rectas, & ſimilibus; poſſunt hujuſmodi Theoremata adhiberi.

THEOREMA I.

Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$, &c.

Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a}$

$$- \frac{b}{a^3} zz$$

$$+ \frac{2bb - ac}{a^5} z^3$$

$$+ \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7} z^4$$

$$+ \frac{3aacc - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9} z^5 + \&c.$$

Exempli gratiâ. Proponatur Æquatio ad Aream Hyperbolæ; $z = y - \frac{1}{2}yy + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5$, &c. Et, ſubſtitutis in Regulâ 1. pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ &c.

THEO-

THEOR. II.

Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9$, + &c. Et viciſſim

erit $y = \frac{z}{a}$

$$- \frac{b}{a^4} z^3$$

$$+ \frac{3bb - ac}{a^7} z^5$$

$$+ \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}} z^7$$

$$+ \frac{55b^4 - 55abbc + 10aabd + 5aacc - a^3e}{a^{13}} z^9, + \&c.$$

Exempli gratiâ. Proponatur Æquatio ad Arcum Circuli $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$, &c., Et, ſubſtitutis in Regulâ, 1 pro a; $\frac{1}{6rr}$ pro b; $\frac{3}{40r^4}$ pro c; $\frac{5}{112r^6}$ pro d; &c. orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \&c.$

Alterum modum regrediendi ab Areis ad Lineas rectas celare ſtatui.

Ubi dixi omnia penè Problemata ſolubilia exiſtere, volui de iis præſertim intelligi, circa quæ Mathematici ſe hactenus occupârunt, vel, ſaltem, in quibus ratiocinia mathematica locum aliquem obtinere poſſunt. Nam, alia ſanè adeò perplexis conditionibus implicata excogitare liceat, ut non ſatis comprehendere valeamus; & multò minùs tantarum computationum onus ſuſtinere, quod iſta requirerent.

 Attamen,

Attamen, ne nimiùm dixiſſe videar, inverſa de Tangentibus Problemata ſunt in poteſtate, aliáque illis difficiliora. Ad quæ reſolvenda uſus ſum duplici Methodo; unâ concinniori, alterâ generaliori. Utramque viſum eſt in præſentiâ litteris tranſpoſitis conſignare, ne propter alios idem obtinentes, inſtitutum in aliquibus mutare cogerer * *5accdæ 10effh 12i 4l 3m 10n 6oqqr 7s 11t 10u 3x: 11ab 3cdd 10eæg 10ill 4m 7n 6o 3p 3q 6r 5s 11t 7ux, 3acæ 4egh 6i 4l 4m 5n 8oq 4r 3s 6t 4u, aaddæ eeeee iii mm nn oo p rrr sssss tt uu.*

Inverſum hoc Problema de Tangentibus, quando Tangens inter Punctum Contactûs, & Axem Figuræ eſt datæ Longitudinis, non indiget his Methodis. Eſt tamen Curva illa mechanica, cujus determinatio pendet ab Areâ Hyperbolæ.

Ejuſdem generis eſt etiam Problema, quando pars Axis inter Tangentem, & Ordinatim applicatam datur Longitudine.

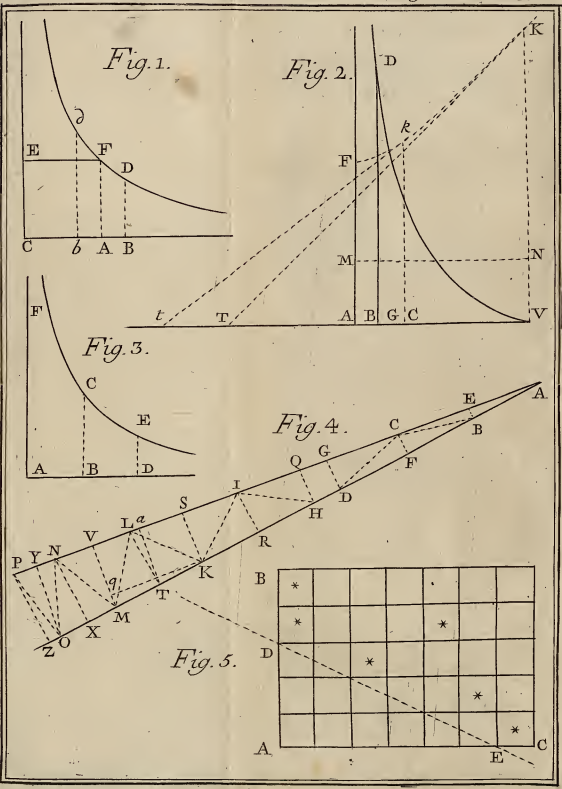
Sed hos caſus vix numeraverim inter † Ludos Naturæ. Nam quando in Triangulo Rectangulo, quod ad illâ Axis parte, & Tangente, ac Ordinatim applicatâ conſtituitur, relatio duorum quorumlibet Laterum per Æquationem quamlibet definitur, Problema ſolvi poteſt abſque meâ Methodo generali: Sed, ubi pars Axis ad Punctum aliquod poſitione datum terminata ingreditur Vinculum, tunc res aliter ſe habere ſolet.

Communicatio Reſolutionis affectarum Æquationum per Methodum Leibnitii pergrata erit; juxta & explicatio quomodo ſe gerat, ubi Indices Poteſtatum ſunt Fractiones; ut in hac Æquatione, $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{2}{3}}$ § $- y^{\frac{7}{11}} = 0$, aut ſurdæ Quantitates, ut in hac

* Id eſt; *Una Methodus conſiſtit in Extractione fluentis Quantitatis ex Æquatione ſimul involvente Fluxionem ejus. Altera tantùm in aſſumptione Seriei pro Quantitate quâlibet incognitâ, ex quâ cetera commodè derivari poſſint, & in collatione Terminorum homologorum Æquationis reſultantis ad eruendos Terminos aſſumptæ Seriei.*

† Vide ſupra Opuſculo hoc Art. 1. pag. 326.

§ In Walliſii Operibus mathematicis Tom. III. pag. 645 habetur pro hoc Termino $- x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{-2}{3}}$.


Fig. 1.
E F D ∂
C b A B
Fig. 2.
D K k F M N
t T A B G C V
Fig. 3.
F C E
A B D
Fig. 4.
A E B C F G D Q H I S R L a V K N Y P q T M X O Z
Fig. 5.
B D A C E

hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}\Big|^{\sqrt[3]{\frac{2}{3}}} = y$; ubi $\sqrt{2}$, & $\sqrt{7}$, non deſignant Coefficientes ipſius x, ſed Indices Poteſtatum, aut Dignitatum ejus; & $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ Indicem Dignitatis Binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, meâ Methodo patet; aliter deſcripſiſſem.

Sed meta tandem prolixæ huic Epiſtolæ ponenda eſt. Litteræ ſanè excellentiſſimi LEIBNITII valdè dignæ erant, quibus fuſiùs hoc reſponſum darem. Et volui hac vice copioſior eſſe, quia credidi amœniora tua negotia ſeveriori hoc ſcribendi genere non debere à me crebrò interpellari.

Tui Studioſiſſimus

IS. NEWTON.

OPUSCULUM XII.

FRAGMENTUM EPISTOLÆ ISAACI NEWTONI AD COLLINSIUM.

A. D. 8. Novembr. 1676.

NUlla extat Curva, cujus Æquatio ex tribus constat Terminis; in quâ, licèt Quantitates incognitæ se mutuò afficiant, vel Indices Dignitatum sint surdæ Quantitates, (verbi gratiâ, $ax^{\lambda} + bx^{\mu}y^{\sigma} + cy^{\tau} = 0$, ub x designat Basim; y Ordinatam; $\lambda, \mu, \sigma, \tau$, Indices Dignitatum ipsius x, & y; & a, b, c Quantitates cognitas unà cûm signis suis $+$, vel $-$,) nulla, inquam, hujusmodi est Curva, de quâ, an quadrari possit, nec-ne, vel quænam sint Figuræ simplicissimæ, quibuscum comparari possit, sive sint conicæ Sectiones, sive aliæ magis complicatæ, intra horæ octantem respondere non possim. Deinde Methodo directâ, & brevi, imò Methodorum omnium generalium brevissimâ, eas comparare queo. Quin etiam, si duæ quævis Figuræ per hujusmodi Æquationes expressæ proponantur, per eandem Regulam, eas, modò comparari possint, comparo.

Affirmatio, quidem, videri potest temeraria, propterea quod perdifficile sit dictu, an Figura quadrari, vel cum aliâ comparari possit, nec ne; mihi autem manifestum est ex eo, unde deduxi, fonte; quanquam id aliis demonstrare in me suscipere nollem. Eadem Methodus Æquationes quatuor Terminorum, aliásque complectitur, haud tamen adeo generaliter.

OPUS-

OPUSCULUM XIII.

EXCERPTUM

EX

DUABUS EPISTOLIS

ISAACI NEWTONI

AD

JOHANNEM WALLISIUM.

EXCERPTUM
EX
DUABUS EPISTOLIS
A B
ISAACO NEWTONO
A D
JOHANNEM WALLISIUM,

Datis A. D. 27. Augusti & 17. Septembris 1692.

JAmque † (NEWTONUS) in Litteris ad me datis Aug. 27; & Sept. 17. 1692, scribit Progressiones esse horum Theorematum, (de Curvis quadrandis) in infinitum pergentes; quæ tamen omnia in hujusmodi Theorematis generalioribus comprehendi possunt.

Wallis. Oper. Math. Tom II. pag. 391.

Si Curvæ Abscissa sit $= z$ & pro Terminis hujus Seriei $a + bz^{\eta} + cz^{2\eta} + dz^{3\eta} + \&c.$ hujúsque $e + fz^{\eta} + gz^{2\eta} + hz^{3\eta} + \&c.$ vel pro eorum quotlibet, scribantur Q & R respectivè; nempe, Q pro primis, & R pro secundis: Sit autem Ordinatim applicata $z^{\theta - 1} \times QR^{\lambda - 1}$, & ponatur $\frac{\theta}{\eta} = r$; $r + \lambda = s$; $s + \lambda = t$; $t + \lambda = u$ &c. erit Area Curvæ

† Harum Epistolarum, quod scire potuerim, exemplar vulgatum non est; sed hoc excerptum exhibuit WALLISIUS plerumque suis (NEWTONI scilicet) verbis. Vide Elenchum contentorum *Tom. II. pag.* 3. sub Num. XCV.

$$z^{\theta} R^{\lambda} \text{ in } \frac{\frac{1}{\eta} a}{re}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta} b - sfA}{\overline{r+2} \times e} z^{\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta} c - \frac{s}{1} fB - tgA}{\overline{r+2} \times e} z^{2\eta}$$

$$+ \frac{\frac{1}{\eta} d - \frac{s}{2} fC - \frac{t}{1} gB - vhA}{\overline{r+3} \times e} z^{3\eta}$$

$+$ &c.

Ubi A, B, C, &c. denotant Coefficientes datas Terminorum Seriei cum signis suis, nempe

A primi Termini Coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta} a}{re}$,

B secundi Coefficientem $\frac{\frac{1}{\eta} b - sfA}{\overline{r+1} \times e}$, & sic deinceps.

Quâ Methodo in hujusmodi Series incidit, minimè explicuit. Eandem tamen litteris quibusdam celavit, quæ recto ordine dispositæ conficiunt hanc sententiam, *Datâ Æquatione, Fluentes quotcunque Quantitates involvente, Fluxiones invenire: & vice versâ.* Per *Fluentes Quantitates* intelligit indeterminatas, id est, quæ in generatione Curvarum per Motum localem perpetuò augentur vel diminuuntur; & per earum *Fluxionem* intelligit Celeritatem Incrementi vel Decrementi. Nam, quamvis *Fluentes Quantitates* & earum *Fluxiones* primâ fronte conceptu difficiles videantur, (solent enim

enim nova difficiliùs concipi,) earundem tamen notionem citò faciliorem evasuram putat, quàm sit notio *Momentorum* aut *partium minimarum* vel *differentiarum infinitè parvarum*; propterea quòd Figurarum & Quantitatum generatio per Motum continuum magis naturalis est, & faciliùs concipitur, & Schemata in hac Methodo solent esse simpliciora, quàm in illâ partium. Attamen, non negligit Theoriam talium partium, sed eâ etiam utitur, quoties ipsa, vel opus brevius reddit, & magis perspicuum, vel ad rimandas Fluxionum proportiones conducit. Abscissam Curvæ, aliámve aliquam Quantitatem Fluentem, uniformiter augeri supponit, & pro ejus Fluxione Unitatem ponit; pro reliquis autem Quantitatibus Fluentibus ipsas ponit Quantitates Punctis notatas in hunc modum. Sint v, x, y, z Fluentes Quantitates, & earum Fluxiones his Notis $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, designabuntur respectivè. Et, quoniam hæ Fluxiones sunt etiam indeterminatæ Quantitates, & perpetuâ mutatione redduntur majores, vel minores, considerat velocitates, quibus augentur, vel diminuuntur, tanquam earum Fluxiones, & Punctis binis notat in hunc modum $\ddot{v}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, & perpetuum Incrementum, vel Decrementum harum Fluxionum considerat ut ipsarum Fluxiones, & Punctis ternis sic notat $\dddot{v}$, $\dddot{x}$, $\dddot{y}$, $\dddot{z}$, & harum Fluxiones Punctis quaternis sic $\ddddot{v}$, $\ddddot{x}$, $\ddddot{y}$, $\ddddot{z}$. Quâ Ratione $\dot{v}$ est Fluxio Quantitatis v, & $\ddot{v}$ Fluxio ipsius $\dot{v}$, & $\dddot{v}$ Fluxio ipsius $\ddot{v}$. Et, si Quantitates Fluentes, vel fractæ sunt vel surdæ, Fluxiones earum sic notat. Quantitatum $\frac{yy}{b-x}$, & $\sqrt{aa-xx}$, Fluxiones sunt $\dot{\overline{\frac{yy}{b-x}}}$ & $\dot{\overline{\sqrt{aa-xx}}}$, & harum Fluxiones sunt $\ddot{\overline{\frac{yy}{b-x}}}$ & $\ddot{\overline{\sqrt{aa-xx}}}$ & sic porrò. His autem expositis, Methodum suam in Propositione hacce problematicâ fundat.

PROBL. I.

Datâ Æquatione Fluentes quotcunque Quantitates involvente, invenire Fluxiones.

SOLUTIO.

Multiplicetur quilibet Æquationis Terminus ſeparatim per Indices ſingulos Dignitatum Quantitatum omnium Fluentium, quæ in Termino illo continentur; & in ſingulis Multiplicationibus mutetur Latus unum Dignitatis in ejus Fluxionem; & Aggregatum Productorum omnium ſub propriis ſignis componet Æquationem novam, quæ Relationem Fluxionum involvet.

EXPLICATIO.

Sint a, b, c, d, &c. Quantitates determinatæ & immutabiles; & proponatur Æquatio quævis Quantitates Fluentes x, y, z, &c. involvens, puta, $x^3 - xyy + aaz - b^3 = 0$. Multiplicentur Termini primò per Indices Dignitatum ipſius x in ipſis contentarum reſpective; & in quâlibet Multiplicatione pro uno Latere Dignitatis, (hoc eſt, pro x unius Dimenſionis) ſcribatur $\dot{x}$ & Summa Productorum erit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy$. Idem fiat in y, & producetur $-2x\dot{y}y$. Idem fiat in z, & producetur $+aa\dot{z}$. Summa Productorum omnium æquetur nihilo; & habebitur Æquatio $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{z} = 0$. Dico, quòd hæc erit Æquatio Relationem Fluxionum involvens.

DEMONSTRATIO.

Sit enim o Quantitas infinitè parva, & ſint $o\dot{z}$, $o\dot{y}$, $o\dot{x}$ ſynchrona Momenta, ſeu Incrementa momentanea, Quantitatum fluentium z, y, & x: & hæ Quantitates proximo Temporis momento

to per acceſſum Incrementorum momentaneorum evadent $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$; quæ in Æquatione primâ pro z, y, & x, ſcriptæ, dant hanc Æquationem $x^3 + 3xxo\dot{x} + 3xoo\dot{x}\dot{x} + \dot{x}^3 o^3 - xyy - \dot{x}oyy - 2xo\dot{y}y - 2\dot{x}oo\dot{y}y + xoo\dot{y}\dot{y} + \dot{x}o^3\dot{y}\dot{y} + aaz + aao\dot{z} - b^3 = 0$. Subduc Æquationem primam, & reſiduum diviſum per o erit $3\dot{x}xx + 3\dot{x}\dot{x}ox + \dot{x}^3 oo - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y - 2\dot{x}o\dot{y}y + xo\dot{y}\dot{y} + \dot{x}oo\dot{y}\dot{y} + aa\dot{z} = 0$. Terminos multiplicatos per o, tanquam infinitè parvos, dele, & manebit Æquatio $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{z} = 0$. *Q.E.D.*

Simili Methodo Æquatio $x^3 - xyy + aa\sqrt{ax - yy} - b^3 = 0$. Evadit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + aa\dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}} = 0$. Ubi, ſi Fluxionem $\dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}}$ eliminare velis, pone $\sqrt{ax - yy} = z$, & per conſequens $ax - yy = zz$, & Propoſitio dabit $a\dot{x} - 2\dot{y}y = 2\dot{z}z$ id eſt, $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2z} = \dot{z}$ ſeu $\frac{a\dot{x} - 2\dot{y}y}{2\sqrt{ax - yy}} = \dot{\overline{\sqrt{ax - yy}}}$. Et inde Æquatio primò inventa fit $3\dot{x}xx - \dot{x}yy - 2x\dot{y}y + \frac{a^3\dot{x} - 2aa\dot{y}y}{2\sqrt{ax - yy}} = 0$.

Et eâdem Methodo pergere licet ad Fluxiones ſecundas ac tertias. Ponatur Æquatio $zy^3 - z^4 + a^4 = 0$, & Propoſitio inde dabit $\dot{z}y^3 + 3z\dot{y}yy - 4\dot{z}z^3 = 0$, & hæc Æquatio, per operationem repetitam, evadet $\ddot{z}y^3 + 6\dot{z}\dot{y}yy + 3z\ddot{y}yy + 6z\dot{y}\dot{y}y - 4\ddot{z}z^3 - 12\dot{z}\dot{z}zz = 0$; & ſic deinceps.

Ut applicetur hæc Methodus ad Quadraturam Curvarum, NEWTONUS pro Fluxione Abſciſſæ uniformi poſitâ, Unitatem aſſumit; & Ordinatam ponit pro Fluxione Areæ; deinde Relationem inter

Abſciſſam & Aream per Æquationem quamvis aſſumptam definit; & inde colligendo earum Fluxiones obtinet Æquationem novam, quâ Relatio inter Abſciſſam & Ordinatam definitur; & tum demum ad quadrandas Curvas efficit, ut hæc Æquatio formam quamvis deſideratam acquirat. Et hac Methodo dicit ſe computo breviſſimo & facillimo Theoremata ſupra poſita inveniſſe. Sed & eâdem Methodo comparat diverſas Curvas inter ſe, ponendo, ſcilicet, earum Ordinatas Fluxionibus Abſciſſarum reciprocè proportionales.

Sub finem Epiſtolæ anni 1676 ſcribit etiam Problema determinandi Curvas per conditiones Tangentium in ſuâ poteſtate eſſe, unà cum aliis difficilioribus; ad quæ ſolvenda ſe uſum eſſe dicit duplici Methodo, unâ concinniore, alterâ generaliore: & utramque litteris tranſpoſitis celat: quæ, in ordinem redactæ, hanc ſententiam exhibent. *Una Methodus conſiſtit in Extractione fluentis Quantitatis ex Æquatione ſimul involvente Fluxionem ejus. Altera tantùm in aſſumptione Seriei pro Quantitate quâlibet incognitâ, ex quâ cetera commodè derivari poſſunt; & in collatione Terminorum homologorum Æquationis reſultantis ad eruendos Terminos aſſumptæ Seriei.* Harum Methodorum ſecunda ex verbis jam recitatis abſque ulteriore explicatione intelligi poteſt; priorem ab Auctore jam accepi, ut ſequitur.

Hæc Methodus, ait, ejuſdem eſt generis cum eâ pro extrahendo Radices ex Æquationibus affectis ſuperiùs deſcriptâ. Pone, quòd Problema reſolvendum reducatur ad Æquationem fluentes Quantitates y, & z, unà cum earum Fluxionibus $\dot{y}$ & $\dot{z}$ involventem, & quòd Fluxio ipſius $\dot{z}$ uniformis ſit. Ut hæc Fluxio ex Æquatione evaneſcat, pro eâ ponatur Unitas, & manebit Æquatio ſolas y, z, & $\dot{y}$, involvens, *quam Reſolvendam* vocat. Proponitur inventio ipſius y in Serie infinitâ convergente, quæ ſolam z involvet. Hoc in aliquibus Æquationibus impoſſibile eſt, in aliis præparationem Æquationum requirit, ubi verò directè confici poſſit, Reſolutio eſt hujuſmodi.

PRO-

PROBLEMA II.

Ex Æquatione, Fluxionem Radicis involvente, Radicem extrahere.

RESOLUTIO.

OPERATIO PRIMA.

Termini omnes, ex eodem Æquationis latere consistentes, æquentur nihilo, & ipsarum y, & $\dot{y}$, Dignitates, (si opus sit,) exaltentur vel deprimantur, sic ut earum Indices nec alicubi negativi sint, nec tamen altiores quàm ad hunc effectum requiritur; & sit kz^{λ} Terminus infimæ Dignitatis eorum, qui neque per y, neque per ejus Fluxionem $\dot{y}$, neque per earum Dignitatem quamvis, multiplicantur. Sit $lz^{\mu}y^{\alpha}\dot{y}^{\beta}$ Terminus alius quilibet, &, omnes ordine Terminos percurrendo, collige ex singulis seorsim numerum $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ sic, ut tot habeas ejusmodi Numeros, quot sunt Termini. Horum Numerorum maximus vocetur ν, & z^{ν} erit Dignitas primi Termini Seriei. Pro ejus Coefficiente ponatur a, & in Æquatione, quæ *resolvenda* dicitur, scribe az^{ν} pro y, & $\nu a x^{\nu - 1}$ pro $\dot{y}$; ac Termini omnes resultantes, in quibus z ejusdem est Dignitatis ac in Termino kz^{λ}, sub propriis signis collecti, ponantur æquales nihilo. Nam, hæc Æquatio, debitè reducta, dabit Coefficientem a. Sic habes az^{ν}, Terminum primum Seriei.

OPERATIO SECUNDA.

Pro reliquis omnibus hujus Seriei Terminis nondum inventis pone p, & habebis Æquationem $y = az^{\nu} + p$, & inde etiam (per Problema I.) Æquationem $\dot{y} = \nu a z^{\nu - 1} + \dot{p}$. In Resolvendâ pro y, & $\dot{y}$, scribe hos eorum valores; & habebis resolvendam novam, ubi p officium præstat ipsius y: & ex hac Resolvendâ primum extrahes Terminum Seriei p eodem modo atque Terminum primum Seriei totius $y = az^{\nu} + p$ ex Resolvendâ primâ extraxisti.

OPERA-

Operatio Tertia, et Sequentes.

Dein, tertiam Refolvendam eâdem ratione invenies atque fecundam inveniſti, & ex eâ Terminum tertium Seriei totius extrahes. Et ſimiliter Reſolvendam quartam invenies, & ex eâ quartum Seriei Terminum, & ſic in infinitum. Series autem ſic inventa erit Radix Æquationis, quam extrahere oportuit.

E X E M P L U M.

Operatio Prima.

Ex Æquatione $yy\dot{z}\dot{z} - zz\dot{z}\dot{y} - dd\dot{z}\dot{z} + d\dot{z}\dot{z}\dot{z} = 0$, extrahenda ſit Radix y. Pone $\dot{z} = 1$, & Æquatio evadet $yy - zz\dot{y} - dd + dz = 0$, quæ eſt Reſolvendâ. Jam verò Terminus infimus, in quo nec y neque $\dot{y}$ reperitur, eſt dd, qui, ipſi kz^{λ} æquatus, dat $\lambda = 0$. Terminis reliquis yy, $-zz\dot{y}$, pone $lz^{\mu} y^{\alpha} \dot{y}^{\beta}$ æqualem ſucceſſivè, & inde in primo caſu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$; & in ſecundo $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ fit in primo caſu 0, in ſecundo -1. Unde ν eſt 0, & az^{ν}, & $\nu az^{\nu - 1}$, ſunt a, & 0; quarum ultimæ duæ, a, & 0, in Reſolvendâ pro y, & $\dot{y}$, ſcriptæ, producunt $aa + 0zz - dd + dz$; & Termini aa, & $-dd$, in quibus Index Dignitatis z eſt λ ſeu 0, poſiti æquales nihilo dant $a = d$. Unde primus Seriei Terminus az^{ν} evadit d.

Operatio Secunda.

Pro Terminis reliquis pone p, & habebis Æquationem $y = d + p$, & inde (per Problema I.) $\dot{y} = \dot{p}$; qui valores in Reſolvendâ pro y, & $\dot{y}$, ſubſtituti dant Reſolvendam novam $2dp + pp - zz\dot{p} + dz = 0$, ubi p, & $\dot{p}$, vices ſubeunt ipſarum y & $\dot{y}$. Terminus unicus, in quo nec p neque $\dot{p}$ reperitur, eſt dz, qui cum Termino kz^{λ} collatus, dat $\lambda = 1$. Terminis reliquis $2dp$, pp & $-zz\dot{p}$ pone $lz^{\mu}p^{\alpha}\dot{p}^{\beta}$ æqua-

æqualem succeſſivè; & inde in primo caſu habebis $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in ſecundo $\mu = 0$, $\alpha = 2$, & $\beta = 0$; & in tertio $\mu = 2$, $\alpha = 0$, & $\beta = 1$. Et hinc $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit primo caſu 1, in ſecundo $\frac{1}{2}$, in tertio 0. Unde ν eſt 1, & az^{ν}, & $\nu a z^{\nu - 1}$, ſunt az, & a. Termini duo ultimi az, & a, in Reſolvendâ pro p, & $\dot{p}$, reſpectivè ſcripti, producunt $2daz + aazz - azz + dz$. Et Termini $2daz$, & dz, in quibus Index Dignitatis z eſt λ ſeu 1, poſiti æquales nihilo, dant $a = -\frac{1}{2}$. Unde az^{ν}, Terminus primus Seriei p, fit $-\frac{1}{2}z$.

OPERATIO TERTIA.

Pro Terminis reliquis nondum inventis pone q; & habebis Æquationem $p = -\frac{1}{2}z + q$, & inde (per Problema I.) $\dot{p} = -\frac{1}{2} + \dot{q}$: Qui valores, pro p, & $\dot{p}$, in Reſolvendâ noviſſimâ ſubſtituti, producunt Reſolvendam novam $2dq - zq + qq + \frac{3}{4}zz - zz\dot{q} = 0$. Ubi q, & $\dot{q}$, vices ſupplent ipſorum y, & $\dot{y}$. Terminus unicus, in quo neque q nec $\dot{q}$ reperitur, eſt $\frac{3}{4}zz$, qui, cum kz^{λ} collatus dat, $\lambda = 2$. Terminis reliquis, $2dq$, $-zq$, $+qq$, $-zz\dot{q}$, pone $lz^{\mu}q^{\alpha}\dot{q}^{\beta}$ æqualem succeſſivè; & inde, in primo caſu habebis, $\mu = 0$, $\alpha = 1$, & $\beta = 0$; in ſecundo, $\mu = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$; in tertio, $\mu = 0$, $\alpha = 2$, $\beta = 0$: in quarto $\mu = 2$, $\alpha = 0$, $\beta = 1$: & inde, $\frac{\lambda - \mu + \beta}{\alpha + \beta}$ evadit in primo caſu, 2; in ſecundo, tertio, & quarto, 1. Et hinc ν eſt 2, vel az^{ν}, & $\nu a z^{\nu - 1}$, ſunt azz, & $2az$: qui valores in Reſolvendâ pro q, & $\dot{q}$, ſubſtituti, dant $2dazz - az^{3} + aaz^{4} + \frac{3}{4}zz - 2az^{3}$; & Termini $2dazz + \frac{3}{4}zz$, in quibus Index Dignitatis z eſt λ ſeu 2,

 poſiti

positi æquales nihilo, dant $a = -\frac{3}{8d}$. Unde, az^{v}, Terminus primus Seriei q, evadit $-\frac{3zz}{8d}$.

OPERATIO QUARTA.

Pro reliquis Seriei Terminis nondum inventis pone r; & habebis Æquationes $q = -\frac{3zz}{8d} + r$, & $\dot{q} = -\frac{3z}{4d} + \dot{r}$; & inde Resolvendam novam $2d\dot{r} + \frac{9z^3}{8d} - zr + \frac{9z^4}{64dd} - \frac{3zzr}{4d} + rr - zz\dot{r} = 0$; & ex eâ, per Methodum superiorem, habebis $-\frac{9z^3}{16dd}$, Terminum primum Seriei r. Et sic pergitur in infinitum.

Est igitur Radix extrahenda $y = d + p = d - \frac{1}{2}z + q = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} + r = d - \frac{1}{2}z - \frac{3zz}{8d} - \frac{9z^3}{16dd} -$, &c. Et, operationem continuando, producere licet Radicem ad Terminos plures.

Et eâdem Methodo, dicit NEWTONUS, Radices Æquationum, Fluxiones secundas, tertias, quartas, ($\ddot{y}, \dddot{y}, \ddddot{y}$,) aliásque involventium, extrahi posse.

His utitur Radicum Extractionibus ubi aliæ Methodi nil prosunt. Nam, in Epistolâ prædictâ anni 1676 docet, quòd in Solutione Problematum de Tangentibus inversorum, casus aliqui dantur, in quibus hæc Methodus generalis non requiritur: & particulariter, si in Triangulo rectangulo, quod ab Ordinatâ, Tangente, & interjacente parte Abscissæ constituitur, Relatio duorum quorumlibet è Lateribus tribus per Æquationem quamvis definiatur, Problema absque Methodo hacce generali solvi poterit.

Methodi autem hæ omnes, tam particulares quàm generales, collectim sumptæ, Solutionem exhibent secundæ partis Problematis, quod NEWTONUS sub initio istius Epistolæ his verbis proposuit. ***Datâ Æquatione, quotcunque Fluentes Quantitates involvente, Fluxiones invenire, & vice versâ.*** Nam, tota Fluxionum Methodus in hujus directâ & inversâ Solutione consistit.

OPUSCU-

OPUSCULUM XIV.

ISAACI NEWTONI EPISTOLA

AD

CHAMBERLAYNUM.

ART. I.

EXCERPTUM
EX
EPISTOLA LEIBNITII
AD
CHAMBERLAYNUM
LONDINI degentem.

Vindobonæ A. D. 28. Aprilis An. 1714.

GRATIAS ago tum ..... cùm de eo, quod tam benignè te offers ad resarciendam amicitiam inter me, & NEWTONUM. Ego quidem eam non discidi. Sed KEILLIUS quidam, cùm aliqua mihi contraria inseruisset *Transactionibus* vestris *Philosophicis*, obstupui, & ut hæc repararentur petivi per Epistolam à SLOANE Societatis à secretis, qui mihi misit scriptum quoddam KEILLII, in quo jus suum ita tuebatur, ut fidem meam aggrederetur. Privatum hominis stomachum id effecisse sum arbitratus, nullo pacto suspicans Societatem aut NEWTONUM ipsum hujus negotii participes esse; & litigare nolens cum homine rerum anteactarum ignaro, & opinans, NEWTONUM ipsum, res gestas meliùs cognoscentem, laboraturum, ut jus meum mihi servaretur, persecutus sum satisfactionem mihi debitam.

Sed quidam, nescio quâ captiunculâ & nimis callidâ juris interpretatione, perfecerunt, ut ego putarer causam dicere apud Societatem, méque ejus jurisdictioni submittere, quod nunquam mihi venerat in mentem. Insuper justitia postulat, ut certior fierem de eo, quod Societas rem penitùs discutere volebat, & ut mihi liceret decla-

rare, an illi rationes meas exponere vellem, & an non aliquis ex Judicibus mihi foret ſuſpectus. Itaque ſententia dicta fuit unâ tantùm parte auditâ, ita ut nullitas ſit manifeſta. Ego tamen non credo, quod ſententia hæc haberi poſſit tanquam Societatis decretum.

Nihilo-minus hanc ipſam ſententiam NEWTONUS per totum Terrarum orbem divulgandam curavit libro quodam * ad hoc ipſum edito, ut nomini meo nota inuretur, & miſſo, tanquam à Societate, in Germaniam, Galliam, & Italiam. Hoc, (ut vocatur,) Judicium, & injuria hæc, quâ immeritò appetitus eſt Vir, qui jamdudum in Societatem hanc receptus fuit, eámque non dedecoravit, multis certè non approbabitur, & plures è Societate ipſâ, ut ſpero, diſſentient. Docti nonnulli, Galli, Itali, & aliarum gentium hæc apertè improbant, & mirantur, ac futilia, (de quibus rebus Epiſtolæ apud me ſunt,) judicant, quæ contra me fuerunt allata.

Ego quidem ſemper humanus, & comis, quàm maximè poteſt, in NEWTONUM fueram, &, quanquam nunc vehementer dubitari poſſit, utrùm habuerit Methodum, quam ego inveneram, antequàm illam ex me didiciſſet, attamen locutus fueram, tanquam ſi proprio ingenio ſibi paraſſet aliquid meæ Methodo ſimile. Ille verò, inconſultis quibuſdam Adultatoribus malè credens, ſe adduci eò ſivit, ut me acerbè laceſſeret. Tu nunc vide, ſis, uter noſtrûm præcipuè facere debeat, quod neceſſarium eſt ad litem hanc terminandam.

Cùm ſim Vindobonæ, id eſt, in ultimam Germaniam, nondum vidi librum contra me divulgatum; huc enim quàm ſerò hujuſcemodi libri afferuntur; nec dignatus ſum eum per Tabellarios publicos mihi ferendum curare; itaque nondum facere potui Apologiam negotio convenientem; non deſunt tamen, qui meæ famæ jam rationem habuerunt.

Eruditos homines acriter & duriter inter ſe concertare moleſtiſſimè fero, &, ne in turbas hujus generis inciderem, ſemper diligentiſſimè curavi: nunc autem omnibus artibus ad certandum compulſus ſum; ſi tuâ operâ, quam adeò benignè polliceris & offers, malum hoc ſanari poſſet, profectò gauderem; & jam nunc de hoc valde te amo, &c.

ART. II.

* Intelligit *Commercium Epiſtolicum* COLLINSII & aliorum.

ART. II.

EPISTOLA NEWTONI AD CHAMBERLAYNUM

A. D. 11. Maii 1714. V. S.

LINGUAM Gallicam non adeò penitus novi, ut sentire possim totam vim verborum, quibus utitur LEIBNITIUS in Epistolâ suâ; tamen intelligo, quòd putat injuriam sibi allatam esse à Regiâ Societate, & à me.

Quæ FATIUS in eum scripsit, (*a*) scripta sunt me prorsus ignaro.

Ante, circiter, novem annos LEIBNITIUS famam meam læsit, (*b*) insinuans, me ab illo mutuâsse Methodum Fluxionum. KEILLIUS (*c*) me defendit: & ego penitùs ignoravi, quæ LEIBNITIUS ediderat in Actis Lipsiensibus, donec huc pervenit primum ejus responsum ad KEILLIUM, in quo reipsâ petebat LEIBNITIUS, ut earum rerum, quæ divulgaveram, (*d*) palinodiam canerem.

Si quid indicare potes, in quo illum injuriâ affecerim, curabo ut ei satisfaciam, sed palinodiam canere nolo rerum, quas veras scio. Opinor autem Conventum Regiæ Societatis iniquè in illum se non gessisse.

(*a*) In *geometricâ Investigatione Lineæ brevissimi descensûs.*

(*b*) Vide Acta Lipsiensia Mensis Januar. An. 1705.

(*c*) Trans. Philos. Mensium Septemb. & Octob. An. 1708.

(*d*) In introductione ad *Curvarum Quadraturam.* Vide pag. 204. hujus.

OPUSCU-

OPUSCU-

OPUSCULUM XV.

ISAACI NEWTONI EPISTOLA

AD

ABBATEM CONTI.

ART. I.

PARS EPISTOLÆ

SCRIPTÆ A

LEIBNITIO

AD

ABBATEM CONTI *

EN Epiſtolam, quâ uti poteris, ſi voles. Nunc ad rem. Gaudeo te eſſe in Britanniâ, ubi proficere licet; fatendum enim eſt quòd ibi ſunt doctiſſimi, & acutiſſimi viri, qui tamen haberi vellent ferè ſoli Inventores; at ut opinor, voti compotes non fient. Non conſtat NEWTONUM habuiſſe ante me Characteriſticam & Algorithmum infiniteſimalem, ut optimè cenſuit BERNOULLIUS; quanquam facilè *habere potuiſſet, ſi animum advertiſſet*, ut facilè APOLLONIUS perveniſſet ad *Carteſianam* Curvarum Analyſin, ſi animum advertiſſet. Ii, qui contra me ſcripſerunt, cùm non veriti ſint aggredi ſinceritatem meam interpretationibus longè remotis à verbis meis, & fundamento deſtitutis, impetrare non potelunt, ut reſpondeam futilibus rationibus hominum tam malignè ſe gerentium, & ceteroquin à ſcopo aberrantium. Agitur enim de Calculo Differentiali, at illi ad *Series* ſe divertunt, in quibus NEWTONUS mihi ſine dubio præivit. Tamen denique inveni Methodum generalem, quâ *Series* eruo, & eâ repertâ, opus ampliùs non habui Extractionibus, ad quas ille confugit. Meliùs feciſſent, ſi in-

Bbb 2 tegras

* Data fuit hæc Epiſtola ſub finem anni 1715. Comm. Epiſt. ad Lectorem in principio.

tegras Epiſtolas edidiſſent, ut me conſentiente VALLISIUS, qui nullam litem mecum habuit, ut homines illi credi vellent. Adverſarii noſtri illam *Commercii Epiſtolici Collinſiani* partem luci dederunt, quam non repugnare malis eorum interpretationibus exiſtimârunt. Novi COLLINSIUM, cùm iterùm eſſem in Britanniâ; nam, cùm primò, ibi brevi moratus ſum, quia Miniſtrum publicum comitabar, & Geometriam abſtruſiorem prorſus ignorabam, ac ne verbum quidem audieram de mutuis COLLINSII, GREGORII, & NEWTONI litteris; ut ſatis patebit ex meis Epiſtolis ad OLDEMBURGIUM, & OLDEMBURGII ad me, quæ ſcriptæ fuerunt circa tempus illud, & paulò poſt.

Sed, cùm ſecundò veniſſem in Britanniam, COLLINSIUS mihi oſtendit Commercii ſui partem, ubi obſervavi NEWTONUM ipſum faſſum eſſe ignorantiam ſuam circa plura, &, inter cetera, eum dixiſſe nihil ſe inveniſſe de Dimenſionibus Figurarum Curvilinearum celebrium, præter *Ciſſoidis* dimenſionem. Sed omnia hæc ſuppreſſa fuerunt. Ægrè fero NEWTONUM, tantum Virum, nimis aſſentiendo conſiliis nonnullorum Adulatorum, qui eum mihi inimicum reddere voluerunt, incidiſſe in Doctorum cenſuram.

Ejus Philoſophia aliquantiſper paradoxa videtur, & dubito an Sectatores inventura ſit. Si omne Corpus grave eſt, *Gravitas* neceſſariò (licèt multa dicant ejus Patroni, & multùm excandeſcant) eſt aut *qualitas occulta ſcholaſtica*, aut *miraculi* effectus. Olim BAYLIO probavi miraculoſum eſſe quidquid ex Creaturarum naturâ nequit explicari. Satis non eſt dixiſſe, Deus hanc Naturæ Legem inſtituit, ergo res naturalis eſt. Oportet, ut Creaturarum vires legem hanc exequi valeant. Si Deus, exempli gratiâ, Corpori libero hanc legem impoſuiſſet, ut verteretur circa aliquod Centrum, oporteret ut, aut adderet alia Corpora, quæ illud impellendo ſemper retinerent in orbe circulari; aut Angelum illi alligaret; aut denique Deus ipſe ratione quâdam extraordinariâ ad hoc faciendum concurreret; nam, per ſuam naturam Corpus illud ab Orbe per Tangentem dilaberetur. Deus perpetuò agit in Creaturis earum naturas ſervans, & hæc ſervatio eſt continua productio earum rerum, quæ Creaturarum perfectiones ſunt. Deus eſt *Intelligentia ſupramundana*, non eſt enim Anima Mundi, & *Senſorio* non eget.

Rationes à NEWTONO ejúſque Sectatoribus allatæ demonſtrare mihi non videntur *Vacuum*; non inquam, magis quàm Gravitatem illam, quam ſibi univerſalem perſuadet, aut Atomos. Tenuitate dumtaxat ingenii impellimur in Vacuum, & Atomos. CLARKIUS diſputat contra *Carteſianorum* ſententiam, affirmantium Deum deſtruere non poſſe materiei partem, ut Vacuum efficiatur; ſed miror eum non videre, quòd, ſi ſpatium eſt ſubſtantia à Deo diverſa, eadem redit difficultas. Aſſerere autem Deum eſſe ſpatium eſt Deo partes tribuere. Spatium eſt quidem aliquid, ſed ut Tempus; utrumque enim eſt generalis rerum ordo; nempe ſpatium Ordo rerum ſimul exiſtentium, & Tempus Ordo rerum ſucceſſivè exiſtentium; vera quidem ſunt hæc, ſed phantaſtica, ut Numeri.

Materies ipſa ſubſtantia non eſt, ſed tantùm *ſubſtantiatum*, Phænomenum benè fundatum, & quod nunquam fallit eos, qui progrediuntur ratiocinando juxta Leges phantaſticas Arithmeticæ, Geometriæ, Dynamicæ, &c. Omnia, quæ de his aſſero, demonſtrata videntur. Sed ecce alia quædam, quæ mihi in mentem revocat mentio, quæ injecta eſt de Dynamicâ, aut virium ſcientiâ. Miror NEWTONUM, ejúſque Diſcipulos ſibi perſuaſiſſe, quòd Deus ita malè machinam ſuam conſtituit, ut, niſi extra ordinem ei manus admoveat; automatum moveri quàm primùm deſiturum ſit. Extraordinariam voco omnem Dei operationem, quæ verſatur circa aliud quàm circa Creaturarum naturas conſervandas. Igitur, quanquam eorum methaphiſica ſuppellex curta, & mathematica ſatis parabilis mihi videatur, attamen plurimi facio Phiſico-Mathematicas NEWTONI Meditationes; túque, optimè de Publico merebis, ſi magnum hunc Virum exorabis, ut edat ipſas conjecturas ſuas de Phyſicâ. Optimum conſilium puto educere, ut ille facit, è Phænomenis, omnia, quæ inde confici poſſunt, nihil ſupponendo, quanquam aliqua non liceret aſſequi niſi per conjecturas. Tamen, quando *Data* non ſufficiunt, fas eſt, (ut aliquando fit cùm explicantur incognitæ Epiſtolarum notæ;) Hypotheſes fingere, quæ, ſi felices ſunt, interim retinentur, quoad nova experimenta ſufficiant nobis *nova Data* aut ea, quæ BACONUS appellat *Experimenta Crucis*, quibus optima Hypotheſeôn ſeligitur. Cùm mihi relatum fuerit aliquos *Anglos* meam Philoſophiam malè

repreſentâſſe in eorum *Tranſactionibus*, non dubito, quin his quæ nunc ſcribo, defendi poſſim. Valde faveo Philoſophiæ experimentali, ſed ab eâ NEWTONUS longè aberrat, aſſerens omnem materiem eſſe gravem, (aut quamcunque materiæ partem aliam attrahere,) quod experimenta nullo pacto confirmant, ut optimè cenſuit HUGENIUS. Materia gravifica habere non poteſt hanc gravitatem, cujus cauſa eſt, & NEWTONUS nullum affert experimentum, nullam rationem ſufficientem, unde probentur aut Vacuum, & Atomi, aut mutua generalis Attractio, ſed non ideo, quia non hactenus perfectè, & ſigillatim novimus, quomodo efficitur gravitas, aut vis elaſtica, vel magnetica &c., non ideo, inquam eas referre licet inter qualitates occultas ſcholaſticas, aut inter miracula; & multò minùs licet terminis circumſcribere Dei ſapientiam, & potentiam, illíque tribuere *Senſorium* aliquod, & ſimilia. Ceterùm, miror NEWTONI ſectatores nihil edere, quod fidem faciat eos ab illo accepiſſe bonam Methodum. Felicior quidem fui Diſcipulis. &c.

ART. II.

ART. II.

EPISTOLA
SCRIPTA A
NEWTONO
AD
ABBATEM CONTI

Quâ respondetur superiori Epistolæ LEIBNITII.

Londini 26. Febr. 1716. V. S.

HAUD ignoras *Commercium Epistolicum* continere Epistolas, & alia scripta jam antiqua, quæ aliquo pacto pertinent ad negotium, de quo disputant LEIBNITIUS, & KEILLIUS, & quæ servata fuerunt, aut in Tabulariis *Regiæ Societatis*, aut in COLLINSII Bibliothecâ; neque ignoras hæc scripta collecta, & edita fuisse à frequenti Virorum illustrium ex diversis nationibus conventu, quem ad hanc rem convocaverat Regia Societas. LEIBNITIUS hactenus responsum huic commercio negavit, optimè sciens res de facto nullâ responsione posse infirmari. Silentium suum excusaturus principio causatus est se non vidisse librum hunc, nec sibi satìs otii esse ad illum perlegendum: dixítque se curam hujus rei commisisse celebri cuidam Mathematico. Responsum, quòd Mathematicus ille, verus aut fictus, dederat die 7 *Junii* 1713, insertum fuit Libello famoso scripto die undetricesimo Mensis Julii ejusdem anni, & edito in *Germaniâ*, sine nomine nec Auctoris, nec Typographi, nec loci, quo excusus fuerat. Omnia hæc deinde in gallicam linguam versa fuerunt, & inserta Epistolæ ejusdem stili, &, ut videtur, ejusdem Auctoris; hisce respondit KEILLIUS mense Julio 1714; neque hactenus huic quidquam responsum fuit. Novâ

Nová nunc excuſatione utitur LEIBNITIUS, ne reſpondeat; non vult ſcilicet adeò *Anglis* morem gerere, ut reſpondeat futilibus eorum rationibus. Nihilominus, ut me in diverticulum conjiciat, conatur me diſputationibus Philoſophicis implicare, & mihi proponit Problemata ſolvenda, ſed hæ diſputationes, & hæc Problemata nihil ad rem.

Si quis vellet ad examen revocare ejus Philoſophiam, non difficulter oſtendere poſſet LEIBNITIUM ab uſu communi detorquere ſignificationem verborum, dum exempli gratiâ, appellat *Miracula*, ea, quæ fiunt, naturâ leges ſuas, ut ſolet, ſervante; dum notat nomine *Qualitatum occultarum*, ea, quarum cauſæ latent; aut dum vocat *animam*, id quod non animat corpora humana.

Oſtendi poſſet, quod ejus *Harmonia præſtabilita*, eſt verum miraculum, & adverſatur experientiæ omnium hominum; cùm quiſque gaudeat facultate videndi ſuiſmet oculis, & movendi ſuum corpus, ut libet. Meritó reprehendi poſſit, quòd poſt-habeat Hypotheſibus inductiones ductas ab experimentis; quòd me criminetur, mihi tribuens ſententias, in quas nunquam fui, & quòd proponat Hypotheſes, quas recipi vult antequàm ponderentur; cùm proponere deberet quæſtiones experimentorum examini ſubjiciendas, priùſquàm in Phiſicâ recipiantur. Sed hæc nihil ad *Commercium Epiſtolicum*.

Quæritur Conſenſum ſe non æquum prodidiſſe, dum omittit quædam contra me facientia; ſed quærimoniam ſuam non probat. Affert ille quidem verba deſumpta ex unâ mearum Epiſtolarum, quibus fatebar ignorantiam meam, & quæ omiſſa fuiſſe aſſerit; ſed hæc verba ſunt in *Commercio* pag. 74. * verſic. 10. 11, nec me hujus confeſſionis pudet. Cùm tamen COLLINSIUS LEIBNITIO iterum Londinum viſenti menſe Octobri 1676. hæc verba oſtenderit, patet LEIBNITIUM eundem vidiſſe Epiſtolam, in quâ ſcripta erant hæc verba, & quæ data fuerat A. D. viceſimum quartum. Octob. 1646. Hæc autem Epiſtola, quin-etiam aliæ præcedentes, continent deſcriptionem meæ Methodi Fluxionum. Inſuper

* Primæ editionis, ſcilicet; ſed ſecundæ pag. 153, verſiculo penultimo & ultimo. & Opuſc. XI. pag. 338. hujus.

per hâc ipsâ Epistolâ continetur descriptio duarum Methodorum generalium pro *Seriebus* obtinendis, in quarum alteram jus aliquod modò sibi vindicat LEIBNITIUS.

Certè persuasum habes; quòd Æquitas postulat ut LEIBNITIUS sibi constet, & nunc fateatur, quæ ante hos quindecim annos fatebatur, nec inficias eat quæ tunc concedebat.

In Epistolâ datâ A. D. vicesimum Maii 1675. fatebatur se ab OLDEMBURGIO accepisse litteras datas A. D. decimum quintum Aprilis, quæ complectebantur plures Series convergentes; idémque nunc eum fassurum spero. Plures Clari Viri ex *Italiâ*, *Galliâ*, & *Germaniâ*, & tute inter alios, vidistis litteras autographas, & eas quæ hinc desumptæ fuerunt, & quæ simul repositæ fuerunt in thecâ papyrorum Regiæ Societatis; igitur diffiteri non potest se vidisse Seriem *Gregorianam*, quæ est in ipsis OLDEMBURGII litteris datis A. D. decimum quintum Aprilis 1675, & in *Gregorianis* datis A. D. Decimum quintum Februarii 1671.

In Epistolâ datâ A. D. duodecimum Maii 1676. quæ lecta fuit ab iisdem Viris, fatebatur se non compotem esse Methodi, quâ extunditur ea Series, quæ exprimit Arcum ex Sinu, nec quæ Sinum ex Arcu; Hoc autem erat fateri, se has Series ignorâsse, cùm daret Epistolam A. D. vicesimum sextum Octobris 1674., idem nunc eum fassurum spero.

In responsione, quam dederat ad FATIUM, & quam impressam videmus in Actis *Lipsiensibus* Maii 1700, cùm FATIUS dixisset me esse primum Inventorem, & LEIBNITIO pluribus annis præivisse, LEIBNITIUS fatetur, se neminem scire, qui habuerit Methodum Fluxionum, aut Differentiarum ante me, & ipsum, & neminem editis libris probâsse, sibi hanc Methodum innotuisse; me hanc Methodum habuisse, antequàm ille eam vulgâsset, quin-etiam antequàm in *Germaniâ* nemini illam tradidisset. Fatetur meum librum de *Principiis* ostendere, me hâc Methodo frui, eundémque continere prima, quæ edita essent, specimina applicationis Methodi hujus ad difficiliora Problemata. Spero igitur LEIBNITIUM semper idem fassurum. Non negabat tunc, quæ asseveraverat FATIUS; si nunc negat, dici poterit eum malâ fide agere.

In unâ ex ejus Epiſtolis datâ A. D. ſeptimum Maii 1693, quæ nunc eſt in Scriniis Regiæ Societatis, legi poſſunt hæc verba. *Mirificè ampliaveras Geometriam tuis Seriebus, ſed edito Principiorum Opere, oſtendiſti patere tibi, quæ Analyſi receptæ non ſubſunt. Conatus ſum ego quoque, notis commodis adhibitis, quæ Differentias, & Summas exhibent, Geometriam illam, quam Tranſcendentem appello, Analyſi quodammodo ſubjicere; nec res malè proceſſit.* Debet nunc quoque mihi tribuere, quæ tunc tribuebat.

In Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum primum Junii 1677, quâ reſpondet ad meam datam A. D. viceſimum quartum Octobris 1676, ait mecum ſentire, quòd Methodus, quâ Slusius utebatur ad Tangentes ducendas, perfecta nondum erat, quâ occaſione deſcripſit Methodum Differentialem, quâ Tangentes determinat, & quæ ipſiſſima eſt, quam Barovius divulgaverat annò 1670; ſed, quia hanc Methodum ſibi tribuebat, eam aliquantisper texit novâ notatione, ac oſtendit, quòd magis extendi, & Methodo à me deſcriptæ æquari poterat; Inde inferens Methodum ſuam à meâ non adeò differre; cùm prefertim ea quoque Quadraturas faciliores redderet. Hujus Elementa tradidit in Actis *Lipſienſibus Octobris* 1684, addens eam ſe extendere ad Problemata difficiliora, quæ facilè ſolvi non poſſent ſine hac, aut aliquâ ſimili Methodo. Tunc igitur temporis fatebatur, me, cùm ſcriberem Epiſtolam de quâ ſupra, datam A. D. viceſimum quartum Octobris 1676, compotem eſſe Methodi æquè vaſtæ ac ſua; quapropter id, ut æquum eſt, nunc pariter fateri debet, præſertim, cùm jam explicatæ ſint tùm ſecretæ notæ, quæ erant in hac Epiſtolâ, tum quædam alia, quæ ad hanc Methodum referuntur, & cùm Compendium, de quo ibi mentio fit, editum ſit.

Dicebat in Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum ſeptimum Auguſti 1676, ſe non credere meas Methodos tam eſſe generales, quàm ego affirmabam in Epiſtolâ à me datâ A. D. decimum tertium Junii præcedentis, & dari Problemata adeò difficilia ut neque Æquationibus, neque Quadraturis ſubjicerentur, quale, inter cetera, eſt inverſum Problema de Tangentibus; His verbis patet Leibnitium fateri ſe nondum inveniſſe rationem revocandorum Problematum ad Æquationes

tiones Differentiales. Quod tunc ipſe fatebatur, fatentur etiam Acta *Lipſienſia* Aprilis 1691 paginâ 198, & ipſe nunc pariter, ut æquum eſt, fateri debet.

WALLISIUS in Præfatione ad duo prima ſuorum Operum Volumina edita anno 1695 indicat me meis Litteris ſcriptis per annum 1676 explanaviſſe LEIBNITIO Methodum, ut eam voco, Fluxionum, &, ut ille, Differentialem, méque inveniſſe hanc Methodum decem annos antea (id eſt, anno 1666, aut antea). Cùm autem LEIBNITIUS ex illo tempore habuerit cum WALLISIO Commercium Epiſtolicum, nec iis, quæ WALLISIUS aſſeruerat, repugnaverit, imò nihil, quod reprehenderet, invenerit, ſpero eum nunc quoque conſenſurum.

Sed, quia jam-dudum accuſationem mihi intentavit, quâ Plagiatûs inſimulor, ſi in eâ perſiſtit, debet eam, juxta leges conſtitutas, probare, alioquin calumniæ reus habebitur. Hactenus ſatis duxit dare ad eos, ad quos ſcribit, litteras plenas affirmationum, querelarum, & cogitationum nihil probantium. Sed Actor eſt, & probare debet id, cujus reum me dicit.

Ab his ſingillatim tractandis abſtineo, quia rem totam cognoſcere potes ex *Commercio Epiſtolico*; & ex ejus *Recenſione*, ad quæ remitti non ægrè feres. Tuus &c.

OPUSCU-

OPUSCULUM XVI.

ISAACI NEWTONI
NOTÆ
IN EPISTOLAM
LEIBNITII
AD
ABBATEM CONTI.

ART. I.

EPISTOLA LEIBNITII

AD

ABBATEM CONTI

Quâ respondetur superiori NEWTONIANÆ

Hannoveræ A. D. 9. Aprilis An. 1716.

AMORE procul-dubio Veritatis provinciam suscepisti mihi mittendi quendam, quasi libellum provocatorium à NEWTONO. Manum conferere nolui, cum militibus emissariis, quos in me compulerat, nempe, neque cum eo, qui se Accusatorem gessit *Commercio Epistolico* innixus, neque cum eo, qui Præfationem acerbitatis plenam præmisit recenti Editioni ejus *Principiorum*; nunc autem, cùm ipse in Arenâ descenderit, illi satisfacere gestio.

Hujus disputationis initio miratus sum me dici Aggressorem; non enim memineram me de NEWTONO minus humaniter & officiosè locutum. Sed deinde vidi in hunc sensum detorqueri quædam verba, quæ sunt in *Actis Lipsiensibus* Januarii 1705; scilicet: Pro *Differentiis* Leibnitianis D. NEWTONUS *adhibet, semperque adhibuit, Fluxiones*. Ubi Auctor Observationum in *Commercium Epistolicum* ait, *pag.* 108,* *Sensus verborum est, quod* NEWTONUS *Fluxiones Differentiis* Leibnitianis *substituit*. Sed hæc est maligna interpretatio hominis rixandi causam aucupantis; cui obviam ire voluisse

* Editionis prioris; & pag. 223 Editionis secundæ.

voluisse videtur Auctor verborum, quæ in Actis Lipsiensibus sunt; dicit enim, quasi ob id ipsum, *adhibet*, *sempérque adhibuit*; innuens NEWTONUM, non post visas Differentias meas, sed jam antea, Fluxiones usurpavisse. Quis unquam tribuere poterit his verbis, *sempérque adhibuit*, sensum à meo diversum, nec rationi aversantem? sed verbum *substituit* adhibetur, cùm sermo est de iis, quæ P. FABRIUS fecit post CAVALLERIUM. Unde sequitur, quòd, aut NEWTONUS se decipi passus est ab aliquo, qui acerbiorem significationem subfinxit his Actorum verbis, quæ divulgata me conscio putabantur, séque credidit Plagiatûs accusari; aut libentur arripuit oblatam ansam sibi tribuendi, vel curandi, ut alii tribuerent ipsi, ceteris exclusis, inventionem novi hujus Calculi, (quem benè vertisse, & totum Orbem implevisse videbat,) contra ea, quæ sciebat, & fassus erat in suis *Principiis paginâ* 253 primæ Editionis. Si quis se scrupulum, aut quærimoniæ causam in verbis *Actorum Lipsiensium* invenisse testatus esset, persuasum habeo, eos, qui ad hæc *Acta* scribenda conveniunt, scrupulum omnem remoturos fuisse; sed putares quæsitam esse causam concertandi.

De frequenti Virorum Illustrium è diversis Nationibus conventu, quem ad hanc rem convocaverat Regia Societas, ne verbum quidem audieram; Nam de eo certior factus non fueram; & hodie quoque ignoro nomina plurium ex iis, quibus constat, & præsertim eorum, qui ex Insulis Britannicis non sunt. Non credo iis probari omnia, quæ sunt in libro in me edito.

Facilè potest intelligi, quòd *Commercium Epistolicum* ad me *Vindobonæ* morantem delatum fuerit aliquandiu, postquàm editum fuerat, licèt de eo mihi renuntiatum fuisset; quod sciens Amicus quidam non minùs mei studiosus quàm NEWTONI ejusdem adjutores, edidit scriptum à NEWTONO vocatum *famosum*; cujus tamen meritò queri non potest NEWTONUS, cùm vehementius non sit iis, quæ contra me divulgata fuerant. Si Scripti hujus Auctor, & locus quo impressum fuerat, silentio teguntur, satìs nota sunt nomen, & domicilium egregii illius Mathematici, qui scripsit Epistolam ibi relatam, & qui, à me rogatus, sententiam de Commercio dixit; quod sufficit; NEWTONUS, (cujus sectatores

res non latet hujus Mathematici nomen, ut ipsi ostenderunt,) eum appellat Mathematicum verum aut fictum, & cùm totis viribus, sed incassum, ad sua castra illum trahere conatus fuerit, eum spernit, contra omnium, hunc inter primi ordinis Mathematicos referentium, sententiam & contra rerum evidentiam, quas ejus inventa confirmant.

Cùm tandem in manus venit *Commercium Epistolicum*, vidi nihil esse in illo, quod ad rem faceret, litterásque, quas complectitur ne verbum quidem habere, unde dubitari possit quin ego invenerim Calculum Differentialem, de quo agitur. Eo negotio prætermisso, observavi quòd totus liber versatur circa *Series*, quarum gloria NEWTONO permittitur, & quòd observationes constant interpretationibus insulsis, aliquando ridiculis, aliquando etiam contra conscientiam aliquorum ex iis, qui eas fingebant vel probabant, fictis, quibus quærebatur, ut ego futilibus suscipionibus lacerarer.

Ut ergo de verbo ad verbum responderem libro in me edito, opus fuisset alio libro magno, saltem, æquè ac ille erat; opus erat singillatim retractare innumeras pusillas res gestas ante hos triginta, aut quadraginta annos, quarum fermè oblitus fueram; opus erat requirere veteres Epistolas, quarum plures, (ne dicam, quòd plerumque mearum exemplaria non servavi,) amissæ sunt; reliquæ autem sepultæ jacent sub magno chartarum acervo, quem ut in ordinem redigerem, opus habebam otio & patientiâ. Otium autem deficiebat me occupationibus alterius generis distentum.

Præterea, observavi, quòd in *Commercii Epistolici* editione suppressa fuerant Loca, quæ contra NEWTONUM facere poterant, cùm nihil prætermissum fuerit, quod in me converti posse putaretur interpretationibus à verborum sensu alienis. Cùm non dignatus fuerim attentiùs legere *Commercium Epistolicum*, mirum non est me exemplum perperam attulisse, quia scilicet illud non videram, aut me vidisse oblitus fueram. Sed aliud afferam. NEWTONUS in quâdam ex suis Epistolis ad COLLINSIUM datis fatebatur se conficere non posse Problema de sectionibus secundis, (aut segmentis secundis) sphæroidum aut solidorum similium; sed locus hic, vel hæc Epistola desideratur in *Commercio Epistolico*. Candidiùs erga Disputantes, & utiliùs erga Publicum editum fuisset *Commercium Epistolicum* COLLINSII totum, saltem, ubi contine-

bat aliquod scitu dignum, Epistolis præsertim non mutilatis; perpaucæ enim restant inter mea scripta, aut quarum Exemplaria habeam.

Omnibus itaque consideratis, tot indiciis perspiciens eos malignè se præstare, nodùmque in scirpo quærere, rem me indignam facturum putavi, si manum conferem cum hominibus tam fædè se gerentibus. Videbam, quòd in iis refellendis difficile fuisset abstinere ab objurgationibus, & verbis acerbitatis plenis, qualia debebantur eorum instituto, neque hoc spectaculum Populo dare volebam, ad meliora destinans Tempus, cujus summa ratio mihi habenda est, & satis contemnens judicium eorum, qui hoc libro innixi, contra me sententiam dicere non verebuntur; præsertim cùm ipsa Regia Societas nihil statuere voluerit, ut didici ex Epitome ejus Tabularum.

Non puto me dixisse, (quòd NEWTONUS mihi tribuit,) quòd *nolo* Anglis *adeò morem gerere, ut respondeam futilibus eorum rationibus*; non enim, opinor, omnes *Angli* suam ducunt NEWTONI causam; nam, non desunt, qui tam polleant ingenio & comitate, ut se totos tradere nolint affectibus, quibus nonnulli ex ejus Fautoribus urgentur.

NEWTONUS præterea me incusat, quòd eum in diverticulum conjicere voluerim suam Philosophiam impugnans, & Problemata proponens; sed de Philosophiâ, meorum Principiorum partem edidi, sua non aggressus; aliqua tantum verba de iis injeci nonnullis Epistolis, cum id occasio postularet, & ansa mihi data fuerit. De Problematibus autem, longè absum ab iis NEWTONO proponendis; cùm egomet ea recusaturus sim, si mihi proponantur: ab iis abstinere nobis per ætatem licet; sed nobis sunt amici, qui vicem nostram implere possunt.

Hìc singillatim recensere nolo; ea, quæ acerbiùs in meam Philosophiam, aut pro suâ loquitur NEWTONUS. Hujus Disputationis locus hic non est. *Miraculum* appello omne id, quod fieri nequit nisi Creatoris potentiâ, cùm Creaturarum natura ejus Rationem non complectatur, &, quando hoc nihilo-minus tribuitur qualitatibus, aut viribus Creaturarum, tunc voco hanc Qualitatem *Qualitatem occultam Scholasticam*, quæ scilicet detegi non potest. Hujus generis esset Gravitas primitiva. Nam, Qualitates occultæ, quæ fictitiæ non sunt, eæ sunt, quarum causam ignoramus quidem,

sed

ſed non excludimus. *Animam hominis* appello ſubſtantiam illam ſimplicem, quæ percipit ea, quæ fiunt in Corpore humano, & cujus appetitus, aut voluntates ſubſequuntur Corporei conatus. *Hypotheſibus* non poſthabeo *Argumenta* ducta per inductionem ab experimentis; ſed nonnunquam obtruduntur peculares obſervationes tanquam inductiones generales, & inter Hypotheſes rejiciuntur propoſitiones demonſtrativæ.

Harmonia mea præſtabilita, quam hic NEWTONUS repræſentat, eadem non eſt, ac illa, quam norunt plures acuti Viri extra Britanniam; nonnulli etiam in ipſâ Britanniâ: túque ipſe, opinor, eam hoc vultu non vidiſti, neque hodie vides, niſi fortè vehementer mutatus ſis ab illo, qui quondam.

Nunquam inficiatus ſum me, dum iterùm eſſem in Britanniâ, vidiſſe apud COLLINSIUM aliquas NEWTONI Epiſtolas; ſed nullas vidi, nec dum video in *Commercio Epiſtolico*, ubi NEWTONUS ſuam Fluxionum Methodum explicuerit.

Sed neque vidi ab eo explanatam Methodum ad *Series* ſpectantem, quam mihi vindico; puto eum intelligere de illâ, quæ conſiſtit in aſſumptione *Seriei* alicujus ad libitum; hanc Methodum uſurpaveram antequàm iterum Britanniam petiſſem; neque tamen affirmo NEWTONUM eam habere non potuiſſe; quinimo non ita difficile erat illam inveniſſe.

Vult NEWTONUS, ut fatear, & concedam, quæ faſſus ſum, vel quæ conceſſeram ante hos quindecim annos; quod ſi negem, confici, inquit, poterit me agere malâ fide. Idem ab ipſo expectari, poterit jam enim prætenerunt bis quindecim anni, ex quo in primâ ſuorum *Principiorum* Editione *paginis* 253, 254, concedit me inveniſſe Calculum Differentialem, ſine ſuæ inventionis auxilio; ſed poſtea, neſcio quomodo, animum induxit, ut per alios huic conceſſioni adverſaretur.

Sciendum eſt, quòd, cùm primò eſſem in Britanniâ anno 1673, prorſus ignorabam *Series infinitas*, quales MERCATOR nuper ediderat, æquè ac alia pertinentia ad Geometriam novis Methodis ampliatam; nequidem ſatis verſatus eram in Analyſi *Carteſianâ*. Mathematica tractabam tanquam *Parergon*, & pauca noram præter *Cavallerianam* indiviſibilium Methodum, & quendam librum Patris

LEOTALDI, in quo erant Quadraturæ Lunularum, & similium Figurarum, unde mihi quoddam ulteriora cognoscendi desiderium.

Sed maximè delectabar Numerorum Proprietatibus, quarum perscrutandarum occasio fuerat Libellus, quem penè puer ediderami Anno 1666 de Arte Combinationum. Et, cùm jam tum animadvertissem quàm utiles essent Differentiæ ad inveniendas Summas, has Differentias ad Series Numerales traduxi. Primæ ex mutuis litteris *Oldemburgicis*, & meis, satis ostendunt me tunc vix ulteriùs progressum. Neque tum COLLINSIUM noveram, ut malignè fingitur.

Cùm *Lutetiæ Parisiorum* familiariter HUGENIUM inviserem, is me paulatim his mysteriis initiavit; Hæc institutio, & MERCATORIS liber, quem ex Britanniâ mecum attuleram, quia mihi de eo PELLIUS locutus fuerat,) viam aperuerunt ad inveniendam sub finem anni 1673 meam arithmeticam Circuli Quadraturam, quam valdè HUGENIO approbavi, & de quâ sermonem feci OLDEMBURGIO in litteris anni 1674. Tunc autem HUGENIUS, aut EGO ne verbum quidem audiveramus de *Seriebus Newtonianis*, vel *Gregorianis*. Itaque me primum credidi, (credidit etiam HUGENIUS), exposuisse Aream Circuli Serie Numerorum rationalium. Hujus sensûs Epistolas ad OLDEMBURGIUM dedi, qui respondit jam hujusmodi *Series* notas esse in Britanniâ; cujus rei me tunc ignarum esse facilè judicari potest ex Epistolâ à me datâ A. D. decimum quintum Julii An. 1674 & ex eâ, quam ad me rescripsit OLDEMBURGIUS A. D. octavum Decembris An. itidem 1674. Nam, si OLDEMBURGIUS, & COLLINSIUS, antea de his Seriebus me monuissent, ille id ipsum mihi in mentem revocâsset. Tunc igitur tantùm aliqua de *Seriebus* audivi; sed adhuc nesciebam tùm rationem extrahendi Radices Æquationum per Series, tùm Regressiones, aut Extractionem Æquationis infinitæ. Aliquantisper tunc eram harum rerum rudis. Attamen, statim inveni meam Methodum generalem per *Series* arbitrarias; & demum perveni ad meum Calculum Differentialem, ad quem penitiùs introspiciendum non inutilia fuerunt ea, quæ, penè puer, observaveram de Differentiis Serierum numeralium; Nam, ad hunc Calculum perveni, non per Linearum Fluxiones, Sed per Numerorum Differentias, animadvertens tandem, quòd hæ Differentiæ applicatæ Quantitatibus perpetuò crescentibus, evanescunt relativè

ad Quantitates differentes, quanquam superfint in Seriebus numerorum. Et hanc viam magis analyticam exiſtimo. Cùm geometricus Differentiarum Calculus, qui idem eſt ac Calculus Fluxionum, ſit caſus peculiaris Calculi analytici Differentiarum in genere, qui caſus peculiaris commodior ſit ob Differentias evaneſcentes.

Deinde NEWTONUS affert loca, in quibus concedo eum noviſſe Calculum meo Differentiali ſimilem; ſed meminerit, quæſo, ſe mihi tantundem tribuiſſe; ſi verò illi palinodiam canere licet, cur ego veter? Præcipuè poſt veriſimilitudines à BERNOULLIO obſervatas. NEWTONUM adeò candidum putaveram, ut nudum ejus verbum fidem apud me faceret; ſed dubitare, (ut æquum eſt,) cœpi, & ex quo illum conniventem vidi in accuſationibus, quas ipſemet falſas ſciebat.

Hodie non poſſum neque fateri, neque diffiteri me ſcripſiſſe, aut recepiſſe Epiſtolas datas ante hos quadraginta annos, ejuſdem tenoris, ac quæ editæ ſunt. Cogor me referre ad ea, quæ ſunt in ſcriptis allatis, ſed nihil contra me invenio in Epiſtolis datis A. D. decimum quintum Aprilis, & viceſimum Maii An. 1675, ac viceſimum quartum Octobris An. 1676, quas NEWTONUS allegat, præter Interpretis mendacia. Si quas Demonſtrationes, aut Methodos perveniendi ad aliqua, ad quæ proprio Marte pervenire facilè potuiſſem ab OLDEMBURGIO petivi, ideo tantùm, puto, feci, quia tunc rebus à Matheſi valde diverſis me totum dabam, vivens ſcilicet *Lutetiæ Pariſiorum*, & quia à Calculis, quorum longitudine terrebar, vehementer abhorrebam. Exempli gratiâ, credo me ante diem duodecimum Maii An. 1676 adeptum fuiſſe meam Methodum *Seriei* arbitrariæ, quâ manuduci potuiſſem ad *Series*, quarum Demonſtrationem poſtulabam. Nam, Serie arbitrariâ utor in veteri illo libello de Quadraturâ Arithmeticâ, quem perfeceram antequam è Galliâ exiiſſem. Tamen eſto; alteri debeam *Series* de quibus meminit hæc Epiſtola, & quas me etiam ignoràſſe credo Anno 1674.

Cùm non ſatis intelligerem, quæ NEWTONUS dicit de *Actis Lipſienſibus* Maii Ann. 1700., librum illum conſului, & perſpicio eum non benè, quæ ibi dicta ſunt, percepiſſe. Nam, illic ne verbum quidem de inventione novi Calculi Differentialis; ſed agitur de arte quadam peculiari pro *maximis*, & *minimis* determinandis,

quæ ab eo non pendet, & mihi in mentem venerat multo antequam BERNOULLIUS proponeret Problema de breviori descensu, & quam existimaveram NEWTONO quoque in mentem venisse, cùm daret Figuram suæ navis in *Principiis* suis. Itaque volui dicere eum se palàm ante me ostendisse hujus Artis compotem, quod affirmare nequibam de Calculo Differentiarum, & Fluxionum, quia ejus utilitatem propalaveram ante libri illius editionem. Hæc ars peculiaris de *Maximis, & Minimis*, necessaria non est, quando agitur de Quantitate simplici, tunc enim FERMATII Methodus, perfectior reddita novis Calculis, sufficit; sed aliud quid requiritur, cùm petitur tota Figura, quæ omnium optimè efficere debet id, quod postulabatur.

Hìc NEWTONUS novam accusationem temerè intentat, quæ in eum recidet. Affirmat quòd, quæ ipsi communicanda scripseram ad OLDEMBURGIUM Anno 1677, omnino sunt Methodus *Baroviana* personata. Cùm autem NEWTONUS fateatur in primâ *Principiorum* suorum Editione, *paginis* 253, & 254 me *ipsi* (tunc *Methodum commmnicâsse â Methodo ipsius vix abludentem, præter quàm in verborum, & notarum formulis*; sequitur quòd ejus Methodus pariter nihil est nisi *Baroviana* personata.

Existimo illum, & me facilè absolutos iri ab hac accusatione; nam, vah! Quot legent librum *Barovianum*, nec in eo nostrum Calculum deprehendent! Verum quidem est, quòd TSCHÜRNAUSIUS, qui paulò seriùs hujus Calculi commoda perspexit, contendit omnia hæc adipisci posse Methodis *Barovianis*: Ut Abbas CATELANUS Gallus dixit Analysim *Cartesianam* ad hæc omnia sufficere; quod facilius dici quàm ostendi poterat.

Si quis autem nostrûm aliquid est à BAROVIO mutuatus, verisimiliùs est id fecisse NEWTONUM, qui eo præceptore usus est, quàm me, qui, (ni malè recordor,) libros BAROVII non videram antèquàm iterùm essem in Britanniâ, & qui eos nunquam attentè legi, quia, cùm in iis oculos injecissem, perspexi, quòd considerans Triangulum Characteristicum, (cujus Latera sunt Elementa Abscissæ, Ordinatæ & Curvæ,) simile alicui Triangulo assignabili, perveneram quasi ludens ad Quadraturas, Superficies, & Solida, quæ conficiunt unum ex majoribus Capitibus Lectionum *Barovianarum*. Præterquàm, quod ad meum Geometricum Differentiarum Calcu-

Calculum non veni, quàm poſt cognitam earum utilitatem, (quemlibet minoris momenti,) in Numeris; ut indicare poſſunt primæ meæ Litteræ, quæ ſunt in *Commercio Epiſtolico.* Fieri poteſt, ut BAROVIUS, plura ſciens, quàm quæ Libro mandârat, vias, quas ignoramus, NEWTONO aperuit. Et ſi audaculis quibuſdam ſimilis eſſem, puris, & levibus indiciis nixus, affirmare poſſem, quòd NEWTONUS à BAROVIO Calculum Fluxionum, (quicunque demum illi ſit,) didicerat.

Quæ Anno 1676 dixi de Problematibus, quæ reſolvi non poterant neque per Æquationes, neque per Quadraturas, intelligenda certè ſunt de Æquationibus tum vulgatis, de iis videlicet, quas præbet Analyſis communis; cujus indicium eſt, quòd addo Quadraturas, velut quid majus his Æquationibus: at Æquationes differentiales etiam ultra Quadraturas extenduntur; & ſatis conſtat me loqui voluiſſe de Problematibus ipſis, qui egent harum Æquationum, tum ignotarum. Hæc objectio jam erat inter Adnotationes ad *Commercium*; ſed NEWTONUM huc uſque deſcendere poſſe non credideram.

Eſt in Epiſtolâ à me datâ ad Diem viceſimum ſeptimum Auguſti An. 1676. *pag.* 65.* in *Commercio Epiſtolico*,) quo inducor ad credendum me tunc eſſe compotem Calculi Differentialis; ibi enim aſſero me ſtatim *certâ Analyſi* reſolviſſe Problema (*certâ Analyſi ſolvi*), quod BEAUNIUS CARTESIO propoſuerat. Hæc autem Analyſis erat Calculus Differentialis; ſine quo tamen ſolvi poteſt illud Problema; & ſolviſſent, puto, HUGENIUS, & BAROVIUS, ſi opus fuiſſet, ut plura alia; ſed merus jocus eſt meâ Notatione. Exiguum mendum perſpicio in hac paginâ; legitur enim † LUDUS *naturæ*, pro HUJUS naturæ; ſed hoc vetus eſt, & eſſe puto in meæ Epiſtolæ exemplo ad NEWTONUM miſſo; NEWTONUS enim huic Epiſtolæ reſpondens litteris datis A. D. viceſimum quartum Octobris An. 1676. (*paginâ* 86. *in Commercio*) ait *Hos caſus vix numeraverim inter ludos naturæ.* Non intellexeram, quæ dicere voluerat, ſed nunc perſpicio erroris fontem.

Hodie nequeo dicere, utrùm animadverterim verba WALLISII, in quibus aſſerit NEWTONUM jam anno 1666. cognoviſſe Methodum Fluxionum ††. Sed, etiamſi animadvertiſſem, nihil contra, puto,

* Primæ editionis, ſecundæ verò pag. 129.

† Vide ſupra Opuſc. XI. Art. I. pag. 336.

†† Hæc ſunt infra.

puto, dixissem. Tunc enim unum NEWTONI verbum fidem faciebat, sed ejus facta me de hoc cautiorem reddiderunt.

NEWTONUS ait se à me plagiatûs insimulari. Sed ubi hoc feci? imò ejus Fautores visi sunt hanc accusationem in me intentare, & ipse in hoc connivit. Nescio an omnino consentiat omnibus iis, quæ illi ediderunt; sed assentior ei dicenti, quòd malignitas accusantis de hoc, & non probantis, Accusatorem calumniæ reum facit.

In extremo suæ Epistolæ capite, me aggressorem appellat; ego verò in hujus initio contrarium ostendi. Hoc præludium facilè terminari poterit. Malè aliquid intellectum fuit, sed non meus est error.

Tuus &c.

POST-SCRIPTUM.

Solvisti Problema, quod NEWTONI Asseclæ solvere hactenus non potuerant; nam, responsum à me extorsisti missâ Epistolâ ipsiusmet NEWTONI. Quo facto, adhortationes omnes supervacaneæ sunt. Si Quæstio fuisset tantùm, uter NEWTONUS, an ego, prior invenisset Calculum, de quo disputatur, planè non laborâssem. Difficile est enim definire, quid, & quandiù uterque silentio texisse potest. Sed quidam NEWTONI Fautor contendit, me à NEWTONO Calculum hunc didicisse; attamen postea verisimilius visum est nonnullis, & ipsi BERNOULLIO, rationem computandi, quam NEWTONUS edidit in WALLISII operibus fabricatam esse ad mei Differentialis Calculi jam editi imitationem. Nec vola nec vestigium Calculi Differentiarum, vel Fluxionum apparet in veteribus NEWTONI Epistolis, quas vidi; nisi fortè in eâ, quam dederat A. D. vicesimum quartum Octobris An. 1676; ubi etiam per ænigmata loquitur; & horum ægnimatum solutio, ab eo data decem post Annis, ostendit quidem aliquid, sed non omne id, quod postulari posset. Nihilominus, in NEWTONUM propensus, olim adeó facilis fui, ut loquerer tanquam si omnia ab eâ detegerentur, & me secuti alii idem dixerunt. Sed humanitas mea malè remunerata fuit. &c.

ART. II.

A R T. II.

ANIMADVERSIONES NEWTONI

In ſuperiorem LEIBNITII *Epiſtolam* AD ABBATEM CONTI.

A. D. $\frac{17}{27}$. Maii 1716.

DEfendit LEIBNITIUS in Epiſtolâ datâ A. D. undetriceſimum Decembris An. 1711. locum, qui eſt in *Actis Lipſienſibus Januarii* 1705. *paginis* 34. *&* 35.; & ſic proprium fecit, † nunc autem illum molliorem reddere fruſtra conatur, contendens verba *adhibet*, *ſemperque adhibuit* malignè interpretari verbo *ſubſtituit*; ſed ab explicatione, quam obtrudere vellet, arcet vim terminorum *igitur*, & *quemadmodum*, à quorum primo verba, *ſemperque adhibuit*, fiunt præcedentium conſectarium; ab ultimo verùm æquivalentia ipſi *ſubſtituit*; ſi autem reponas hæc omiſſa, videbis ſuſtineri non poſſe ſenſum, quem his verbis nunc tribuere conatur. Meritò igitur dixi eum ſe accuſatorem in me geſſiſſe. In duabus Litteris ab eo datis ad SLOANE A. D. quartum Martii, & undetriceſimum Decembris An. 1711, urgebat Regiam Societatem ad KEILIUM condemnandum, & me volebat cogere ad ſententiam meam aperiendam, licèt ab hoc negotio prorsùs abſtinuiſſem.

En

† In hac Epiſtolâ ait LEIBNITIUS. *Fruſtra ad Exemplum* Actorum Lipſienſium *provocat* (KEILIUS,) *ut ſua dicta excuſet; in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, ſed potiùs paſſim ſuum cuique tributum.* Commerc. Epiſtol. N°. LXXXV. pag. 239. Edit. ſecundæ.

En verba secundæ Epistolæ * : *itaque vestræ æquitati committo, an non coercendæ sint vanæ, & injustæ* KEILII *vociferationes, quas ab ipso* NEWTONO, *Viro insigni, & gestorum optimè conscio, improbari arbitror; ejúsque sententiæ suæ libenter daturum indicia mihi persuadeo.* Honestissima verba; sed quæ sibi volunt, oportere, ut aut damnem KEILIUM, aut cum LEIBNITIO contendam, quod accidit. Ille igitur Aggressor est. Hìc enim omnes optimè norunt, me semper diligenter has lites vitavisse, quoad Regia Societas, & ego nos iis immiscere coacti fuimus.

In Epistolâ datâ A. D. quartum *Martii* 1711. N. S. à Regiâ Societate enixè rogavit, ut partibus inauditis KEILIUM condemnaret; & cùm KEILIUS † pro causâ suâ dixisset, LEIBNITIUS se responsurum negavit **, & contendit iniquum esse instare ut responderet; at interea ipse pervicaciter instabat, ut KEILIUS damnaretur. †† Ratio hæc, quâ LEIBNITIUS se gerebat, coegit Societatem ad convocandum Consessum compositum ex ejus Membris, expensurum vetera Scripta, quæ ad rem facere poterant, & de hoc relaturum. Quod si eo inscio factum est, ejus culpa est. Nam, quæ ratio habenda erat hominis, qui à Societate vi rem extorquere volebat, contendens iniquum esse petere, ut *candorem* suum Apologiâ defenderet, & apud eam, *tanquam pro Tribunali* litigaret? si ei copia facta non est indicandi eos, quos à Consessu remotos vellet; id ideo factum est, quia se defendere recusabat; quia Consessum cogere, vel eo non assentiente, licebat; quia ipsi jus nullum erat criminandi quæ gesta sunt, ut ante-facta cognoscerentur. In eum nihil hactenus decretum est, quia Consessus non erat hominum sub jurejurando sententiam dicentium conventus, neque *Regia Societas* Collegium Judicum. Consessus satìs habuit examinare Epistolas, & alia vetera

* En verba primæ. KEILIUS *in hoc ipso volumine* (Transact. Philosoph.) mense Sept. Oct. 1708. pag. 185. *renovare ineptissimam accusationem visus est, cùm scripsit* Fluxionum Arithmeticam à NEWTONO inventam, mutato nomine, & notationis modo à me editam fuisse . . . . Id quidem quàm falsum sit nemo melius ipso NEWTONO *novit*... æquum esse vos ipsi, credo, judicabitis, ut KEILIUS testetur publicè, non fuisse sibi animum imputandi mihi, quod verba insinuare videntur. Comm. Epistol N°. LXXX. pag. 224. Edit. secund.

† Vide Comm. Epistol. N°. LXXXI. pag. 226. Edit. sec.

vetera Scripta, de iis ſolùm judicavit, & LEIBNITIO reliquit plenam libertatem ſe defendendi ſi poteſt. Satìs eſt *Regiam Societatem* curaviſſe edendam hujus conſeſſûs relationem unà cum Scriptis, quibus innititur; & LEIBNITIUM nihil probare potuiſſe contra KEILIUM, licèt jam ab horum editione fluxerint tres anni, & quatuor menſes.

Ait LEIBNITIUS, quòd, cùm ejus Epiſtola, quam famoſam nominavi, acerbior non ſit iis, quæ in eum edita ſunt, de eâ queri nullo modo poſſum: ſed acerba eſt ea Epiſtola, quia referta accuſationibus, & conſiderationibus injurioſis, omni probatione deſtitutis; quæ ſcribendi ratio ſemper habita eſt indigniſſima: & uſurpata in malis cauſis defendendis. *Commercium* verò acerbum non eſt, niſi quia continet facta, quæ divulgari permittunt jus & æquum. Epiſtola edita fuit clàm, & quaſi per inſidias; ut paſſim fit de libellis *famoſis*; compreſſum fuit nomen Auctoris, & *Mathematici*, cujus Epiſtola illi adnexa fuerat; æquè ac Typographi & Urbis, ubi impreſſa fuerat, & vix poſt duos ab editione annos audivimus Mathematicum, illum, qui dederat Epiſtolam junctam illi de quâ agitur, eſſe *Johannem* BERNOULLIUM. *Commercium* autem palam editum fuit *Londini* juſſu Regiæ Societatis.

LEIBNITIUS ponens me non ignorare, quòd Epiſtola data A. D. ſeptimum Junii 1713, & inſerta ei, de quâ memini, erat à BERNOULLIO, ægre fert me eum dixiſſe *Mathematicum*, aut *qui dicitur Mathematicus*; quod certè non dixi ut BERNOULLIUM deprimerem. Sed, cùm *Mathematicus* ille, cujus hæc Epiſtola eſt, BERNOULLIUM memorans, (& quidem cum elogio, eum enim dixerat *eximium Mathematicum*,) ſe ipſe à BERNOULLIO diverſum feciſſet; & cùm LEIBNITIUS nuper

 rurſus

** Vide Comm. Epiſtol. N°. LXXXV. pag. 239. Edit. ſec.

†† Ait enim. *Quæ* Johannes KEILIUS *nuper ad te ſcripſit, candorem meum apertiùs, quàm antè oppugnant; quem ut ego hac ætate, poſt tot documenta vitæ, Apologiâ defendam, & cum homine docto, ſed novo, & parum perito rerum ante actarum cognitore, nec mandatum habente ab eo, cujus intereſt, tanquam pro Tribunali litigem, nemo prudens æquúſque probabit.* Comm. Epiſtolic. N°. LXXXV. pag. 239. Edit. ſecund.

rurſus edens hanc Epiſtolam ſub nomine BERNOULLII, & citationem ſupprimens, aſſeruiſſet eam à BERNOULLIO datam; quem crederem? An *Mathematicum*, qui ſe BERNOULLIUM non eſſe innuebat? An LEIBNITIUM, qui *Mathematicum* hunc eſſe BERNOULLIUM ipſum contendebat?

BERNOULLIUS LEIBNITIO debet Methodum differentialem; eſt princeps ejus Diſcipulorum; pro eo pugnavit in *Actis Lipſienſibus*, antequàm vidiſſet *Commercium Epiſtolicum*: Tunc ergo erat *homo novus*, *& rerum ante-actarum parùm peritus*, ut LEIBNITIUS KEILIO objecerat. Ad ſe ipſum defendendum ſcripſit, quæ ex illo tempore ſcripſit, & tota ejus Matheſeum peritia non obſtat, quin ad partes acceſſerit in hac contentione; igitur in hac cauſâ Judex integer ſedere non poteſt.

Queritur LEIBNITIUS Conſeſſum à ſcopo aberraſſe, cùm ſe ad *Series* infinitas convertit; ſed in mentem revocare debuerat duas Methodos, quibus utor, eſſe velut duos ramos unius ejuſdémque generalis Methodi Analyticæ. Eas junxeram in libello de Analyſi, quem BAROVIUS miſerat COLLINSIO Anno 1669; eas invicem miſcueram in Opuſculo, quod ſcripſeram Anno 1671, ut monueram in Litteris A. D. decimum Decembris An. 1672. & viceſimum quartum Octobris An. 1676. In Epiſtolâ à me datâ A.D. decimum tertium Junii An. 1676. dixeram meam Methodum *Serierum* ſe extendere ad ferè omnia Problemata; ſed eam generalem non evadere ſine auxilio aliarum Methodorum; quibus intelligebam, ut declaratum eſt in Epiſtolâ ſequenti, * Methodos Fluxionum, & Serierum ad arbitrium aſſumptarum. Nunc autem auferre mihi has duas Methodos, nihil aliud eſt quàm me rejicere ad Methodum Serierum, id eſt, ad Methodum minùs generalem. In Epiſtolâ meâ datâ A. D. viceſimum quartum Octobris An. 1676 omnes has Methodos ſimul ſumptas appello meam Methodum generalem, ut videri poteſt in *Commercii Epiſtolici paginâ* 86, lineâ 6. ** Cùm autem LEIBNITIO placuerit meam Methodum generalem in fruſta diſcerpere, & mihi eripere nunc partem hanc, nunc illam, & hoc

* Datâ A. D. 24. Octobris An. 1676. Vide ſupra paginâ. 356.

** Primæ Edition., & ſecundæ pag. 189. lin. 14. vide ſupr. Opuſc. XI. pag. 356.

hoc pacto reliquum mutilare, legitimam occasionem præbuit *Regiæ Societati*, ut Methodum hanc totam simul perpenderet. Animadvertendum etiam est, quòd semper sibi ipsi testis est; Sed Testium fides ad trutinam revocari solet.

Contendit Conventum à Regiâ Societate convocatum omisisse plura, quæ faciebant contra me, & edidisse omnia, quæ in eum converti poterant *interpretationibus à verborum sensu alienis*. Hæc probaturus affert in penultimis Litteris monumentum meæ ignorantiæ, quod à Consessu compressum dicit; sed editum nunc fatetur, séque per errorem contra affirmavisse. Habet autem aliud, quod afferat, me scilicet falsum esse in quâdam Epistolâ ad COLLINSIUM datâ, quòd invenire non poteram secunda sphæroidum segmenta; quem locum prætermissum asserit in Commercio. Meliùs quidem, puto, prætermissus fuisset; nihil enim ad rem facit; sed res longè aliter se habet; Siquidem COLLINSIUS in Epistolâ datâ ad *Jacobum* GREGORIUM A. D. vicesimum quartum Decembris An. 1670, & in alterâ ad BERTETUM datâ A. D. vicesimum primum Februarii An. 1671, (quæ ambæ sunt in Commercio paginis 24; & 26 †,) ait Methodum meam ire ad secunda segmenta Solidorum Rotatione genitorum. Idem LEIBNITIO significaverat OLDEMBURGIUS Epistolâ ad Leibnitium datâ A. D. octavum Decembris An. 1674, ut videri potest ex *Commercio paginâ* 39 ††. Igitur LEIBNITIUS accusavit Conventum à *Regiâ Societate* convocatum, licèt certus non esset de suæ accusationis veritate; quæ est summa temeritas, ne quid acerbius dicam. Adeò abfuit Consessus ad se iniquum LEIBNITIO præstandum, ut tacuerit eum tunc Geometriæ ignarum, & omiserit plura, quæ contra eum fecissent; qualia sunt duæ Epistolæ quæ tum apud me erant * nec non pars Præfationis additæ à VALLISIO 1. Tomo suorum Operum Mathematicorum **. Insuper observare poterant, quòd Exemplum

 Episto-

† Primæ Edit., secundæ verò paginis 96, & 100.

†† Primæ Edit., & secundæ pag. 116.

* Hæ duæ Epistolæ datæ ad NEWTONUM à LEIBNITIO & WALLISIO Annis 1693. & 1695. sunt in adnexâ Appendice. Vide infra.

** Hæc etiam est in Appendice. Vide infra.

Epistolæ à GREGORIO datæ A. D. 5. Septembris Ann. 1670. missum fuit ad LEIBNITIUM mense Junio An. 1676. cum collectione Epistolarum *Gregorianarum*.

Confessus affirmat in Relatione suâ, quòd omnia, quæ pertinebant ad negotium iis commissum, extracta fuerant ex Epistolis, Scriniis, & aliis veteribus Scriptis, quæ habebat pro fidelibus, & authenticis. LEIBNITIUS eum criminatur, quòd non ediderit Epistolas totas, tum quæ spectabant ad negotium de quo agitur, tum quæ ab eo prorsùs erant alienæ; tanquam si non liceret afferre, aut extrahere locum aliquem è libro quopiam, ipso toto libro non allato. Queritur ergo non satis amplum esse *Commercium Epistolare*; quod tamen nimis amplum ei videtur, cùm respondere debet, & ait illud postulare responsum ejusdem voluminis. Oportet igitur removere omnes authenticas tabulas, ut quæstio degeneret in frivolas contestationes de Philosophiâ, & aliis rebus nihil ad rem facientibus. Oportet, ut eximius Mathematicus ille, qui, ut meliùs videatur Judex integer, abscondit nomen suum in Epistolâ ad LEIBNITIUM datâ A. D. septimum Junii An. 1713., nunc in apertum prodeat, se certamini immisceat, per LEIBNITIUM omnes *Britanniæ* Mathematicos provocet; tanquam si prælium singulare, aut forte pugna inter eos, quos ille vocat meos Milites emissarios, & illum Discipulorum exercitum, quem LEIBNITIUS jactat, meliùs definire posset utrius causa melior est in hac contentione, quàm vetera & authentica Scripta; & tanquam si in posterum Mathesis referta esse deberet amplissimis Equitum errantium gestis, & non rationibus, ac demonstrationibus.

Fatetur LEIBNITIUS, quòd, cùm iterum esset in Britanniâ, vidit apud COLLINSIUM nonnullas ex meis Epistolis, & inter alias, illas, in quibus agitur de *Seriebus*, & nominatim meminit de duabus, nempè de illâ, quæ data fuerat A. D. vicesimum quartum Octobris An. 1676. & de illâ, in quâ fateor, ut ipse dicit, ignorantiam meam circa secunda Segmenta. Unde sequitur, quòd non potest dubitari, quin præcipuè optaverit videre Epistolam, in quâ erant præcipuæ meæ Series, eæ præsertim, quæ pertinebant ad rationem inveniendi *Arcûs* è *Sinu*, & *Sinûs* ex *Arcu*, earúmque Serierum Demonstrationem; quam quidem Epistolam, (quæ inscri-

inscribitur *Analysis per Æquationes numero Terminorum infinitas*,) ut sibi à COLLINSIO impetraret, OLDEMBURGIUM obsecraverat paucos ante menses. Nihilominus dicit se nescire, ubi applicaverim Methodum Fluxionum, nec ejusdem vestigium se videre in *Commercio Epistolico*; in quo tamen sunt tum hæc *Analysis*, cum Epistolæ à me datæ, A. D. decimum Decembris An. 1672; decimum tertium Junii An. 1676; & vicesimum quartum Octobris Anni pariter 1676. Puto eum ideo dicere, quòd hanc Methodum ibi non videt, quia nulla ibi est Littera puncto aucta. Eodem ratiocinio ipse, & BERNOULLIUS, conficere possunt, quòd Methodus Fluxionum omninò abest ab Introductione ad meum Libellum *de Quadraturis*.

Asserit quoque se non videre, ubi explicuerim Methodum, quam mihi tribuo, sumendi scilicet Series Arbitrarias; sed, si perspicere dignatur Commercii Epistolici paginas 56, & sequentes usque ad 86, videbit me compotem fuisse hujus Methodi Anno 1676. sive potius quinque Annis antè. Vidisse etiam potest in secundo volumine Operum WALLISII *paginâ* 393, lineâ 32. quòd hæc Methodus non eget explicatione ampliori, quàm illâ, quæ à me data, & ibi relata est. Fieri quidem potest, (non inficior,) ut LEIBNITIUS hanc Methodum proprio ingenio detexerit; sed certè postquam ego inveneram, & omnes norunt secundis Inventoribus nullum in inventa jus esse.

Contendit, quòd in meo *Principiorum* Libro, *paginis* 253. *&* 254. concessi eum habuisse Calculum Differentialem sine me, & ait, quòd mihi nunc tribuens ejus inventionem, revoco, quæ concesseram; sed in Articulo, quem citat, nec verbum quidem invenio, quod pro eo faciat. Quinimo ibi significo, me de meâ Methodo monuisse LEIBNITIUM antèquàm ipse me de suâ monuisset; & ei necessitatem impono probandi se hanc Methodum invenisse ante diem, ad quem data fuerat mea Epistola, id est, octo menses saltem ante diem, ad quem ipse suam dederat. Insuper, cùm ibi rejiciam ad Epistolas, quæ inter me, & LEIBNITIUM intercesserant decem annis antè, Lectoribus relinquo curam consulendarum harum Epistolarum, quæ explicare possunt Articulum, de quo disputatur. Ex his

his enim Epistolis videre poterant; me quinque annis antequam scriberentur, (id est, anno 1671,) composuisse librum de hac, & Serierum Methodis simul junctis. Itaque Articulus ille, quem affert, satis indicat, quid de hac re sentiendum sit; sed paucis verbis, quia libri illius scopus non erat hujus negotii discussio.

Ait, quòd, cùm primò esset Londini mensibus Januario, & Februario Anni 1673, prorsus ignorabat Series infinitas, & Geometriam sublimem, neque COLLINSIUM noverat, ut *malignè fingitur.* Sed qui finxit, aut quæ fingendi necessitas? Prorsùs nescio. Tunc temporis jam PELLIUS ei locutus fuerat de Serie, quam MERCATOR invenerat pro quadrandâ *Hyperbolâ*; secum *Lutetiam Parisiorum* attulit MERCATORIS Librum, quamquam Geometriam sublimiorem adhuc ignorabat, & ii, quibus COLLINSIUS communicaverat meas, & *Gregorianas* Series, poterant aliquid de illis ei dixisse, licèt COLLINSIUM ipsum non nosceret.

Dicit, quòd, postquam è *Londino Lutetiam* se contulisset, priùs scripsit Epistolas de rebus à Geometriâ alienis, donec hanc eum HUGENIUS docuisset; quòd invenit Circuli *Quadraturam Arithmeticam* sub finem Anni 1673; quòd de illâ scribere cœpit ad OLDEMBURGIUM Anno sequenti; quòd paulò post invenit Methodum generalem Seriei ad libitum assumptæ, & *Calculum Differerentialem* Anno 1676, quem deduxerat è Seriebus numerabilibus, ubi Differentiæ considerantur; & quod verba *Certâ Analysi*, quæ sunt in Litteris ab eo datis A. D. vicesimum tertium Augusti Ann. 1676, intelligenda sunt de Analysi differentiali. Sed nonne, & ego æquè benè mihi testis esse possum, & affirmare, quòd inveneram Methodum Serierum & Fluxionum Anno 1665; quòd eam protuli Anno 1666; quòd etiam nunc apud me sunt plura scripta mathematica, Annorum 1664, 1665, & 1666; quorum nonnullis dies adscriptus est, & inter quæ unum, datum A. D. decimum tertium Novembris 1665, continet Methodum directam Fluxionum his verbis.

PRO-

PROBLEMA.

Datâ Æquatione exprimente Relationem duarum, aut plurium, linearum x; y; *&* z &c. *simul descriptarum à duobus, aut pluribus Mobilibus* A; B; C; &c. *invenire Relationem celeritatum* p; q; r; *earumdem.*

SOLUTIO.

Pone omnes Æquationis Terminos ad unam eandémque partem, ita ut sint æquales nihilo; multiplica quemque Terminum per toties $\frac{p}{x}$, quot Dimensiones habet x in illo Termino; Deinde, multiplica quemque Terminum per toties $\frac{q}{y}$, quot Dimensiones habet y in illo Termino; Tertiò multiplica quemque Terminum per toties $\frac{r}{z}$, quot Dimensiones habet z in illo Termino &c. & Summa horum Productorum erit æqualis nihilo; quæ Æquatio dat Relationem ipsarum p; q; r; &c.

Addere possum, quòd hæc Solutio ibi illustratur pluribus Exemplis; demonstratur; applicatur ad Problemata, quæ pertinent ad Tangentes, & Curvaturas Curvarum; quod aliud scriptum, datum A. D. decimum sextum Maii Ann. 1666, continet generalem Methodum resolvendi Problemata ad Motum spectantia explicitam septem Propositionibus, quarum ultima est ipsum Problema, de quo supra, scriptum A. D. decimum tertium Novembris An. 1665; quòd in Libello, scripto mense Novembri 1666, eædem septem Propositiones repetuntur, sed septima ita extenditur, ut eam non morentur neque Fractiones, neque Quantitates surdæ, neque demum eæ, quæ nunc dicuntur Transcendentes; quòd hic Libellus insuper continet octavam Propositionem, quæ complectitur inversam Fluxionum Methodum, qualem tunc temporis habebam; id est, quatenus pendet à Figurarum curvilinearum Quadraturis; à tribus Regulis, quibus innititur mea Analysis *per Æquationes numero Terminorum infinitas*, & à ferè omnibus aliis Theorematibus, quæ sunt in *Scholio* decimæ Propositionis mei Libri *de Qua-*

draturis; quòd in eo Libello Area proveniens ab aliquo ex Ordinatæ Terminis, quoties exprimi nequit Analysi vulgari, exponitur symbolo |‾‾‾| ante hunc Terminum scripto; Exempli gratiâ, si Abscissa est x, & Ordinata $ax - b + \frac{bb}{a+x}$, Area totalis est $\frac{1}{2} \times axx - bx +$ |‾‾‾| $\frac{bb}{a+x}$; quòd ibi aliquando usurpavi litteras unico Puncto notatas pro Quantitatibus Fluxiones primas involventibus, aliquando easdem litteras, sed duobus Punctis auctas pro Quantitatibus Fluxiones secundas involventibus; quòd huic Libello innitebatur majus quoddam opus, quod scripseram Anno 1671 & de quo memineram in Epistolâ datâ A. D. vicesimum quartum Octobris An. 1676, & quod initium ducebat à Reductione Quantitatum finitarum in Series convergentes, & à Solutione horum duorum Problematum.

I.

Relatione Quantitatum Fluentium inter se datâ, Fluxionum Relationem determinare.

II.

Expositâ Æquatione Fluxiones Quantitatum involvente, invenire Relationem Quantitatum inter se; & quòd hunc Librum scribens adeò generalem, Methodis Serierum, & Fluxionum simul junctis, Analysim meam effeceram, ut ferè ad omnigena Problemata se extenderet; quod innueram in Litteris datis A. D. decimum tertium Junii An. 1676; & quòd hæc est Methodus, quam descripseram in Epistolâ à me datâ A. D. decimum Decembris An. 1672.

Anno 1684. Leibnitius vulgavit tantùm Elementa Calculi Differentialis, quem applicavit ad aliquas Quæstiones de Tangentibus, & ad quasdam alias, quæ pertinent ad Methodum de *Maximis, & Minimis*, quod Fermatius, & Gregorius fecerant ante eum; & ostendit quomodo in his Quæstionum generibus procedi possit non sublatis Quantitatibus irrationalibus; sed Problemata sublimioris Geometriæ non attigit. Liber de *Principiis Mathematicis* continet prima specimina, (quæ quidem edita sint,) hujus

hujus Calculi applicati ad profundiora Problemata; & sic acceperam, quæ LEIBNITIUS dixerat in *Actis Lipsiensibus* Mensis Maii An. 1700 *paginâ* 206. Sed LEIBNITIUS animadvertit, quòd ea, quæ tunc dixerat, intelligenda sunt de peculiari quâdam Arte circa *Maxima*, & *Minima*, quam mihi patuisse fatetur, cùm indicarem in meis *Principiis* Figuram Navis, aut Solidi minimè omnium resistentis. Sed, cùm hæc Ars Methodum Differentialem cognitam supponat, quinimò cùm ultra ejus fines progrediatur; cùm alioquin huic Arti LEIBNITIUS, ejúsque Discipuli debeant Solutionem Problematum, quæ pluris ille facit, cùm denique LEIBNITIUS appellet hanc Artem Methodum maximi momenti, & vastissimæ extensionis, mihi satis est eum fassum esse, quòd ego primus opere vulgato ostendi me hanc Artem novisse.

Anno 1689. LEIBNITIUS pro suis edidit præcipuas Propositiones libri *de Principiis*, idque tribus scriptis, quorum tituli *Epistola de Lineis Opticis*: *Schediasma de Resistentiâ medii*, & *motu Projectilium gravium in medio resistente*; & *Tentamen de Motuum Cælestium Causis*: has Propositiones à se inventas contendens ante editionem Libri de Principiis; &, ut meliùs sibi vindicaret præcipuam ex his Propositionibus, censuit addendam Demonstrationem, quam ipse extruxerat; quæ cùm erronea esset, ipse suam causam prodidit, & ostendit se non intellexisse rationem procedendi ad secundas Differentias. Hoc fuit secundum specimen palàm editum hujus Methodi applicatæ ad sublimiorem Geometriam. Hactenus parum cognita fuerat, sed uno, aut altero Anno præ omnium manibus esse cœpit.

Vulgaverat BAROVIUS Anno 1670. differentialem suam Methodum pro Tangentibus; GREGORIUS hanc Methodum suæ conferens sibi comparavit Methodum generalem, quæ Calculo non indigebat, de quâ COLLINSIUM certiorem fecit Epistolâ datâ A. D. quintum Septembris An. 1670. SLUSIUS mense Novembri An. 1672. cum OLDEMBURGIO communicavit Methodum similem. Ego verò ad COLLINSIUM misi Methodum iis proximam Litteris datis A. D. decimum Decembris 1672, & addidi me de eâ locutum fuisse BAROVIO dum *Lectiones* suas *Geometricas* ex

 cudenda-

cudendas curabat, & intellexiſſe Methodos GREGORII & SLUSII cum meâ convenire; hanc autem nihil eſſe niſi Ramum, aut Corollarium cujuſdam Methodi generalioris, quæ ſine moleſto computo complectebatur non ſolùm Tangentes, ſed alia Problemata abſtruſiora, ut ſunt, quæ ſpectant ad Curvarum Curvaturas, Areas, Longitudines, Centra Gravitatis &c.; & id quidem non remotis ab Æquatione Quantitatibus irrationalibus. Addidi etiam me hanc Methodum conjunxiſſe cum Methodo Serierum infinitarum, in Libello ſcilicet, quem ſcripſeram An. 1671. OLDEMBURGIUS, menſe Junio 1676. ad LEIBNITIUM miſit Exempla harum duarum Epiſtolarum cum Excerptis ex GREGORII Litteris; pro quibus nihil non jam factum aut hiſce ipſis Litteris renuntiatum rependit LEIBNITIUS Litteris datis A. D. viceſimum primum Junii 1677; cùm Methodus differentialis pro Tangentibus, quam tunc miſit eſſet ipſiſſima *Baroviana*, quam celaverat novâ notatione, & extenderat ad Methodos *Gregorianam* & *Sluſianam* pro Tangentibus, ad Æquationes Quantitatibus irrationalibus implicatas, & ad ſimpliciorem caſum mearum Quadraturarum. Mihi verò idem objici nequit; nam, BAROVIUS viderat libellum meum de Analyſi Anno 1669, & ſibi placuiſſe teſtatus fuerat; & è meâ Methodo generali deduxeram Methodos GREGORII, & SLUSII pro Tangentibus, antequam *Lectiones Geometricæ* ederentur. Tunc LEIBNITIUS ignorabat non ſolùm Geometriam ſublimiorem, ſed etiam Algebram vulgarem.

Ejus Epiſtola data A. D. viceſimum ſeptimum Auguſti 1676. continet hæc verba; *Quod dicere videmini pleraſque difficultates (exceptis Problematibus* Diophanteis) *ad Series infinitas reduci, id mihi non videtur: Sunt enim multa uſque adeò mira, & implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia ſunt, ex multis aliis, Problemata Methodi Tangentium inverſæ.* Cùm autem reſpondiſſem hæc Problemata eſſe in meâ poteſtate, reposuit Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum primum Junii 1677. quòd ego forte intelligebam per Series infinitas, ſed quòd ipſe locutus erat de Æquationibus vulgaribus; quod autem reſponſum fuerit videri poteſt in *Commercio Epiſtolico paginâ 92.*

Dicit

Dicit intelligi posse, quòd, cùm scriberet Epistolam A. D. vicesimum septimum Augusti 1676, aliquatenus progressus erat in Calculo Differentiali, quia in hac Epistolâ ipse indicat se solvisse Problema *Beaunidnum certâ Analysi.* Sed quid? si ostendero hoc Problema solvi posse *certâ Analysi* non adhibitâ Methodo Differentiali. Ad hoc enim nulla alia requiritur Analysis, quàm hæc; quòd scilicet oportet, ut Ordinata ad Curvam petitam crescat, aut descrescat in continuâ geometricâ Proportione, dum Abscissa crescit in continuâ Proportione arithmeticâ; & idcirco ut Abscissa, & Ordinata eandem inter se Relationem habeant, ac Logarihmus, & Numerus ei respondens. Sed hinc inferre, quòd Methodus Differentialis penitus LEIBNITIUM non latebat, idem planè esset ac asserere eam ARCHIMEDI notam fuisse, quia scivit Tangentes ducere ad Spiralem, quadrare Parabolam, & invenit Rationem Sphæræ ad Cylindrum; sive eam non fugisse CAVALLERIUM, FERMATIUM, & WALLISIUM, quia confecerunt plura ejusdem generis.

APPENDIX.

Cùm Consessus à *Regiâ Societate* convocatus edidit *Commercium Epistolicum*, non viderat Epistolas, & alia scripta, quæ apud me erant. Habebam autem duas Epistolas, alteram à LEIBNITIO datam A. D. $\frac{7}{17}$ Martii 1693, alteram verò a WALLISIO datam A. D. 10. Aprilis 1695, quæ, re postulante, jam duo sunt Anni, productæ fuerunt, perpensæ, & repositæ in Scriniis *Regiæ Societatis.* Prima palàm facit, quæ LEIBNITIUS de hac re sentiebat, cùm mea symbola ignorabat; de Methodo Fluxionum nihil sciebat, nisi quæ didicerat ex meis litteris, aliisque scriptis Anno 1676, aut antea, compositis, aut ex meis *Principiis* Mathematicis, id est, cùm nondum in mentem mihi venisse poterat voluntas eum decipiendi. Ex eâ apertè patet, quòd tunc me sibi anteferebat. Secunda verò, si conferatur cum præfatione Operum Mathematicorum WALLISII, ostendet, quid censerent Mathematici tum *Angli*, tum exteri, cùm audierunt hanc Methodum differentialem percrebrescere in Hollandiâ, & ejus inventionem tribui LEIBNITIO; Hìc addidimus primam Epistolam totam, & alterius partem.

EPISTOLA LEIBNITII AD NEWTONUM

ILLUSTRI VIRO

ISAACO NEWTONO

GODEFRIDUS GUILLELMUS LEIBNITIUS S.P.D.

Hannoveræ $\frac{7}{17}$ Martii 1693.

QUantùm tibi Scientiam rerum Mathematicarum, totiúſque Naturæ debere arbitrer occaſione datâ, etiam publicè ſum profeſſus. Mirificè ampliaveras Geometriam tuis Seriebus; ſed, edito Principiorum Opere, oſtendiſti patere Tibi etiam quæ Analyſi receptæ non ſubſunt. Conatus ſum ego quoque, Notis commodis adhibitis, quæ Differentias & Summas exhibent, Geometriam illam, quam Tranſcendentem appello, Analyſi quodammodo ſubjicere; nec res malè proceſſit. Sed à te adhuc magni aliquod expecto ad ſummam manum imponendam; tum ut Problemata, quæ ex datâ Tangentium proprietate quærunt Lineas, reducantur optimè ad Quadraturas; tum ut Quadraturæ ipſæ, (quod valdè vellem,) reducantur ad Curvarum Rectificationes; ubique Superficierum, aut Corporum dimenſionibus ſimpliciores.

Sed ſuper omnia optem, ut, Geometricis abſolutis, Naturam, ut cœpiſti, mathematicè tractare pergas; in quo genere certè tu unus cum pauciſſimis ingens operæ pretium feciſti. Mirificum eſt, quòd inveniſti Ellipſes *Keplerianas* prodire, ſi tantummodo Attractio,

tio, five Gravitatio & Trajectio in Planetâ concipiantur. Tametsi enim eo inclinem, ut credam hæc omnia Fluidi ambientis motu five effici, five regi; analogia Gravitatis, & Magnetismi apud nos, nihil tamen ea res dignitati & veritati inventi tui detraxerit.

Quæ summus & ipse Mathematicus *Christianus* HUGENIUS in suâ notavit Appendice Libelli de causâ Luminis & Gravitatis, expensa tibi non dubito; & sententiam tuam vicissim velim. Vestrâ enim amicâ collatione potissimùm, qui in hoc genere eminetis, erui Veritas potest.

Cùm verò maximum tu quoque lumen ipsi Dioptricæ intuleris, explicatis Colorum Phænomenis inexpectatis, velim quid sentias de *Hugenianâ* explicatione Radiationis, utique ingeniosissimâ, cùm feliciter adeò prodeat Lex Sinuum. Significavit mihi HUGENIUS, nescio quæ nova Phænomena Colorum sibi à Te communicata. Ego valde optem, ut ratio Colorum, quos fixos vocant, ex apparentibus deduci possit; seu, ut ostendatur ratio efficiendi per Refractiones, ut tota aliqua Superficies certum Colorem ostendat.

In Librorum apud Anglos editorum indicibus, occurrêre mihi aliquoties Libri mathematici Auctore NEWTONO, sed dubitavi an à Te essent, quod vellem, an ab alio homonymo.

HEINSIUS noster redux testis fuit benevolentiæ erga me tuæ. De cultu verò meo erga Te, non ille tantùm testari potest; sed & STEPNEIUS, tecum ejusdem olim Collegii habitator, nunc Magnæ Britanniæ Regis negotia apud Cæsarem, nuper apud Serenissimum Electorem Brandeburgicum, curans.

Hæc scribo magis, ut studia erga Te mea intelligas, quæ nihil tot annorum silentio amisêre, quàm ut Tua ego studia, quibus auges humani Generis opes, interrumpere velim vacuis Litteris & supervacuis, vale.

EXCERP-

EXCERPTUM EPISTOLÆ A WALLISIO AD NEWTONUM

Datæ Oxoniæ A. D. 10. Aprilis An. 1695.

UTinam typis ederes prolixas illas duas Epiſtolas Junii & Auguſti (Octobrem *dicere debuit*) 1676. Ex Hollandiâ certior factus ſum amicos ibi tuos hoc poſtulare; quia notiones tuæ (de Fluxionibus) Leibnitio ibi aſcribuntur, ſub nomine *Calculi Differentialis*. Hoc ex *Hollandiâ* accepi cùm totus hic Tomus, præter partem Præfationis, jam prælo ſubjectus eſſet, ita ut nihil aliud inſerere hìc potuerim, dum ceſſarent operæ, præter brevem illam, quam ibi reperies, narrationem. Non tam æquus es vel tuo vel Gentis tuæ honori, quàm oportebat; cùm res quantivis pretii tamdiu in Scriniis celas, donec alii honorem tibi debitum præripiant. Conatus ſum *in eo negotio debitum tibi reddere.*

En Præfationis *Wallisianæ*, editæ menſe Aprili An. 1695, locum de quo ſupra mentio facta eſt.

Quæ in ſecundo Volumine habentur, in Præfatione eidem præfixâ dicitur. Ubi (inter alia) habetur Newtoni Methodus de *Fluxionibus*, (ut ille loquitur,) conſimilis naturæ cum Leibnitii, (ut hic loquitur,) *Calculo Differentiali*, (quod qui utramque Methodum contulerit, ſatis animadvertat, utut ſub loquendi formulis diverſis,) quam ego deſcripſi (*Algebræ Cap.* 91. &c. præſertim *Cap.* 95.) ex binis Newtoni Litteris, (aut earum alteris,) *Junii* 13. & *Octob.* 24. 1676. ad Oldemburgium datis, cnm Leibnitio tum communicandis, (iiſdem ferè verbis, ſaltem leviter mutatis, quæ in illis Litteris habentur;) ubi Methodum hanc Leibnitio exponit, tum ante decem annos, nedum plures, ab ipſo excogitatam. Quod moneo ne quis cauſetur de hoc *Calculo Differentiali* nihil à nobis dictum eſſe.

FRAGMEN-

FRAGMENTUM BREVIARII OPERUM WALLISIANORUM

DATI IN

ACTIS ERUDITORUM

Menſ. Jun. An. 1696. Pag. 257; 258.

Ceterùm ipſe Newtonus, non minùs candore quàm præclaris in rem mathematicam meritis inſignis, publicè & privatim agnovit Leibnitium tum, cùm (interveniente celeberrimo Viro *Henrico* Oldemburgio *Bremenſi* Societatis Regiæ *Anglicanæ* tunc Secretario) inter ipſos, (ejuſdem jamtum Societatis ſocios,) Commercium intercederet, id eſt, jam ferè annos viginti, & ampliùs, Calculum ſuum differentialem, Seriéſque infinitas, & pro iis quoque Methodos generales habuiſſe; quod Wallisius in Præfatione Operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit; quoniam de eo fortaſſe non ſatis ipſi conſtabat.

Ceterùm Differentiarum conſideratio *Leibnitiana*, cujus mentionem facit Wallisius, (ne quis ſcilicet, ut ipſe ait, cauſaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipſo dictum fuiſſe,) meditationes aperuit, quæ aliunde non æquè naſcebantur. Eſt enim Differentia Analyticum quiddam, & Calculi capax, &, quod rei caput eſt, Summæ reciprocum.

ANIMADVERSIONES NEWTONI

In ſuperius Actorum Lipſienſium Fragmentum.

Aſſerueram quidem in Epiſtolis à me datis A. D. decimum tertium Junii, & viceſimum quartum Octobris An. 1676. me adeptum fuiſſe Methodum Fluxionum aliquot Annos antè; ſed nunquam faſſus

ſum LEIBNITIUM habuiſſe Methodum differentialem ante Annum 1677. Neſciebam, quid ſibi tunc tribueret, cùm patefacere animum ſuum cœpiſſet ſolummodo Epiſtolâ datâ A. D. viceſimum primum Junii eodem Anno. Nunquam conceſſi ſuam Tranſmutationum Methodum generalem eſſe pro Seriebus, neque tunc ſciebam eum recepiſſe Anno ſuperiore ab OLDEMBURGIO Seriem à LEIBNITIO mihi miſſam, nec illam inventam fuiſſe à GREGORIO Anno 1611. Methodus Tranſmutationum non eſt Methodus obtinendi Series, ſed Theorema peculiare, quo una Figura in aliam tranſmutatur. Talia ſunt Theoremata GREGORII, & BAROVII. Scholium adnexum ſecundo Lemmati ſecundi libri meorum *Principiorum Mathematicorum*, quod toties malè allatum eſt contra me, ſcriptum non fuit, ut hujus Lemmatis gloria LEIBNITIO tribueretur, ſed ut mihi aſſereretur. Utrùm LEIBNITIUS illud poſt me invenerit, aut ex me mutuatus fuerit, quæſtio eſt nullius momenti, nam ſecundis Inventoribus nullum jus in Inventa eſt.

WALLISIUS Litteris datis Kalendis Decembribus An. 1696, & editis in tertio ſuorum Operum Tomo LEIBNITIUM monuit de verbis, quæ inſeruerat Præfationi primi voluminis, & de quibus ſupra meminimus; neque tunc LEIBNITIUS inficiatus eſt, quæ WALLISIUS dixerat, nempè à me illi explicatam fuiſſe Anno 1676. Methodum Fluxionum, quam inveneram decem, aut pluribus Annis antè; neque de WALLISIO queſtus eſt. Ait in Epiſtolâ datâ A. D. undetriceſimum Martii 1697. *De te autem queri nunquam mihi in mentem venit, quem facilè apparet noſtra in Actis Lipſienſibus prodita non ſatis vidiſſe.* Fatebatur has Methodos eſſe ſimiles †, ut *Walliſius* affirmaverat; quamobrem in Epiſtolâ datâ A. D. duodetriceſimum Maii 1697. ait ſe *itaque communi nomine deſignare ſolere Analyſeos Infiniteſimalis.* Deinde addit, *quemadmodum, &* Vietæa, & Carteſiana *Methodus* Analyſeos Specioſæ *nomine venit; diſcrimina tamen nonnulla ſuperſunt: ita fortaſſe &* Newto-

† En ejus verba *Methodum* Fluxionum *profundiſſimi* NEWTONI *cognatam eſſe Methodo meæ* Differentiali *non tantùm animadverti, poſtquam opus ejus, & tuum prodiit, ſed etiam profeſſus ſum in* Actis Eruditorum, *& alias quoque monui.* Epiſt. ad Wall. 28. Maii 1697. Vide Comm. Epiſt. N°. LXXVI. pag. 216. Edit. ſecundæ.

Newtoniana, *&* mea *differunt in nonnullis.* Sic innuens ea differre Additionibus, quibus hæc cumulaverat. Quapropter excusat WALLISIUM, qui de his Additionibus non meminerit, quia ea *in Actis Lipsiensibus prodita non satis* viderat, & testatur sibi de WALLISIO *queri nunquam in mentem venisse* quâcumque aliâ de causâ.

Sed, si CARTESIUS nunquam se asseruit Auctorem *Analyseos speciosæ Vietææ*, aliter se gessit LEIBNITIUS circa Methodum Infinitesimalem, quam semper appellavit suam Methodum; unde FATIUS impulsus est ad sequentia scribenda.

EXCERPTUM

E Libro Nicolai FATII DUILLERII *inscripto*

Investigatio Geometrica Solidi rotundi, in quod minima fiat resistentia.

Et edito An. 1699.

QUæret forsan Cl. LEIBNITIUS, unde mihi cognitus sit iste Calculus, quo utor. Ejus equidem fundamenta, ac plerasque Regulas proprio Marte anno 1687., circa Mensem Aprilem, & sequentes, aliisque deinceps annis, inveni; quo tempore neminem eo Calculi genere, præter me ipsum, uti putabam. Nec mihi minùs cognitus foret, si nondum natus esset LEIBNITIUS. Aliis igitur glorietur Discipulis, me certè non potest. Quod satis patebit, si olim Litteræ, quæ inter Clarissimum HUGENIUM méque intercesserunt, publici juris fiant. NEWTONUM tamen primum ac pluribus annis vetustissimum hujus Calculi Inventorem, ipsâ rerum evidentiâ coactus agnosco; à quo utrùm quicquam mutuatus sit LEIBNITIUS, secundus ejus Inventor, malo eorum, quàm meum sit Judicium, quibus visæ fuerint NEWTONI Litteræ, aliíque ejusdem Manuscripti Codices. Neque modestioris NEWTONI silentium, aut prona LEIBNITII sedulitas, inventionem hujus Calculi sibi passim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractârint, quæ ipse evolvi, Instrumenta.

ANIMADVERSIONES NEWTONI

In ſuperiora FATII *verba.*

HIc teſtis eſt FATIUS & narrat quæ viderat, ac eò magis fidem facit, quòd magis contra ſe ipſum loquitur, & quò-minus, cùm Anglus non ſit, credi poteſt mihi favere. Noverat Methodos noſtras, & fretus iis, quæ viderat, & perſpexerat, rectè judicare poterat.

FINIS TOMI PRIMI.

NEWTON OPUSCULA MATHEMA

I